Los Caminos del Saber



SANTILLANA



Matemáticas 8 para educación básica secundaria, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada por el Departamento Editorial de Santillana S. A., bajo la dirección de **Fabiola Nancy Ramírez Sarmiento**.

EQUIPO EDITORIAL

Diana Constanza Salgado Ramírez. *Editora ejecutiva*
Carlos David Sánchez. *Editor júnior*
Edgar Alexander Olarte Chaparro. *Editor júnior*
Daniel Rojas Ruiz. *Editor de contenidos digitales*
Juan Gabriel Aldana Álvarez. *Asistente editorial*
Óscar Fernando Cruz, Isabel Hernández Ayala. *Revisores de contenidos*

AUTORES

Marysol Ramírez Rincón
Licenciada en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Especialista en Matemática Aplicada. Universidad Sergio Arboleda.

Martha Lucía Acosta
Licenciada en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Especialista en computación para la docencia. Universidad Antonio Nariño. Magíster en docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional.

Andrea Constanza Perdomo Pedraza
Magíster en edición. Universidad de Salamanca, España. Licenciada en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ludwig Gustavo Ortiz Wilches
Especialista en docencia e investigación. Universidad Sergio Arboleda. Licenciado en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

Valeria Celi Rojas
Licenciada en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Magíster en matemáticas. Universidad Nacional de Colombia.

Ricardo de Armas Costa
Licenciado en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Magíster en Matemáticas Aplicadas. Universidad EAFIT. Estudios de Doctorado en Matemáticas Aplicadas. Universidad de La Habana, Cuba.

José Omar Castaño León
Licenciado en física. Universidad Pedagógica Nacional.

Jeinsson Giovanni Gamboa Sulvara
Licenciado en Física. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Juan Carlos Jiménez Ruiz
Licenciado en matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

El especialista encargado de avalar este texto desde el punto de vista de la disciplina específica y desde su pedagogía fue Lucía Victoria Cabrera Díaz. *Licenciada en Matemáticas. Pontificia Universidad Javeriana. Magíster en Economía. Universidad de Los Andes.*

La especialista encargada de avalar este texto desde la equidad de género y de su adecuación a la diversidad cultural fue María Ivonne Wilches Malhecha. *Psicóloga. Universidad Nacional de Colombia. Magíster en estudios de género. Universidad Nacional de Colombia.*

Se han hecho todos los esfuerzos para ubicar a los propietarios de los derechos de autor. Sin embargo, si es necesario hacer alguna rectificación, la Editorial está dispuesta a hacer los arreglos necesarios.

EQUIPO GRÁFICO Y TÉCNICO

Iván Merchán Rodríguez. *Coordinador de arte creativo y diseñador del modelo gráfico*
Pep Carrió. *Creador gráfico de las carátulas*
Mauricio García Duque. *Coordinador de contenidos digitales*
Martha Jeanet Pulido Delgado, Orlando Bermúdez Rodríguez. *Correctores de estilo*
Alveiro Javier Bueno Aguirre. *Analista de soporte técnico*
Luis Nelson Colmenares Barragán. *Documentalista y operador de escáner*
Lady Midlennis Sánchez Yopazá, Omar Julián Zárate Mesa. *Asistentes de documentación*
Sandra Patricia Acosta Tovar, Juan Carlos López Gómez. *Diseñadores*
Exemplarr Worldwide. *Diagramación*
Teresa Alcira Vanegas Chaves. *Digitadora*
Diomedes Guillombo Ramírez, Edwin Hernando Cruz Delgado, Danilo Ramírez Parra, Juan Wiesner. *Ilustradores*
Repositorio Santillana, Archivo Santillana, Getty Images, Corel professional Photos, Images provided by Photodisc, Inc., Corbis Images, Archivo Santillana. *Fotografía*
Francisco Rey González. *Jefe de producción*

Debido a la naturaleza dinámica de la Internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web, a los que se hace referencia en este libro, pueden sufrir modificaciones o desaparecer. El uso de Internet debe ser supervisado por los padres de familia, tutores y docentes.

© 2013 EDITORIAL SANTILLANA S. A.

Carrera 11A No. 98-50
Bogotá, Colombia
ISBN 978-958-24-2267-7 Obra completa
ISBN 978-958-24-2299-8 Edición para el alumno
ISBN 978-958-24-2300-1 Edición para el docente

Este libro está elaborado de acuerdo con las normas ICONTEC NTC-4724 y NTC-4725 para textos escolares.
Depósito legal en trámite.
Impreso en Colombia por

Prohibida la reproducción total o parcial, el registro o la transmisión por cualquier medio de recuperación de información, sin permiso previo por escrito de la Editorial.

SANTILLANA

PRESENTACIÓN DEL MODELO

Proyecto **Los Caminos del Saber**

Es un **programa de educación** que te ofrece múltiples recursos, impresos y digitales, para que adquieras conocimientos y desarrolles habilidades que te permitan enfrentar los retos del futuro.

¿Qué te ofrece el programa para el área de Matemáticas?



Un libro del estudiante
que responde a las exigencias planteadas por el MEN y promueve el desarrollo de tus competencias.

Un sitio Web
www.santillanaplus.com.co con más recursos ***interactivos*** y ***multimedia*** que agregan valor a tu desarrollo escolar.



Un Libromedia en DVD, que:

- Contiene una amplia variedad de recursos digitales.
- Es fácil de manejar y no requiere conectividad.
- Se vincula a tu salón de clases y a tu hogar como una oportunidad para aumentar tu eficacia en el aprendizaje.



¿Cómo está organizado tu libro?

Para que juntos alcancemos las metas educativas que nos hemos propuesto, el programa de educación te ofrece un libro organizado en diez unidades y estas se presentan así:

Página inicial

Al comienzo de cada unidad, encontrarás una doble página de apertura donde se presentan los temas que abordarás y los logros que vas a alcanzar. También se enumeran los contenidos y las actividades que desarrollarás en tu Libromedia, así como las evaluaciones que te ayudaran a afianzar tus conocimientos y competencias.



Tu plan de trabajo...
Presenta los temas y logros que vas a desarrollar en la unidad.

Encuentra en libromedia
Relaciona los objetos digitales y las evaluaciones que complementan tu libro.

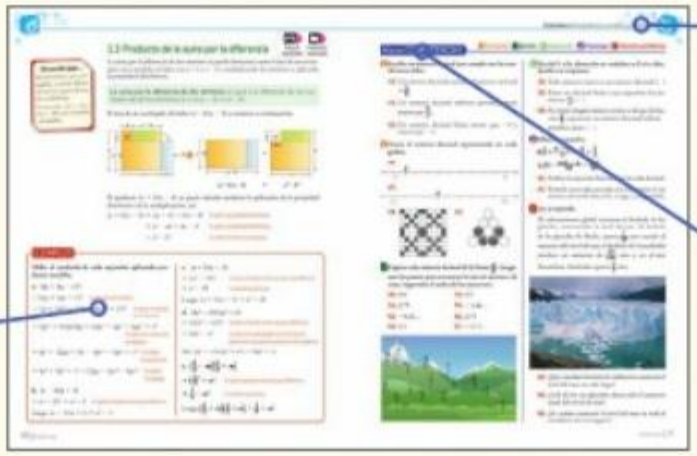
Cronología
Es una línea de tiempo que te muestra cómo ha sido estudiado un tema de la unidad, en diferentes épocas y lugares del mundo.

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?
Es una lectura de motivación que te informa sobre una aplicación práctica del tema de la unidad.

Lo que sabes
Es una autoevaluación de conceptos que debes saber para que aprendas con mayor facilidad lo que se va a trabajar.

Desarrollo de temáticas

El desarrollo de los contenidos está acompañado de ejercicios y de situaciones en contexto, cuya solución se explica paso a paso. Además, encuentras actividades para desarrollar tus competencias.



Te indica el tipo de estándar o estándares que se trabajan en cada página.

Afianzo competencias
Son actividades para interpretar, argumentar y proponer. También para ejercitar, razonar, modelar o solucionar problemas.

Ejemplos
Son ejercicios de aplicación de la teoría que se está trabajando.

En el desarrollo de las temáticas también encuentras:



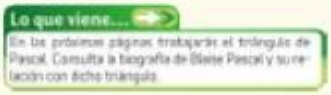
En estos recuadros encontrarás datos acerca de los acontecimientos históricos relacionados con la temática que se está trabajando.



Este cuadro te recuerda información clave para que puedas comprender mejor la teoría.



En esta sección encontrarás preguntas acerca de la teoría que se está trabajando.



En estos cuadros encuentras una pregunta acerca del tema siguiente para que te prepares para la próxima clase.

Al final de la unidad encuentras:

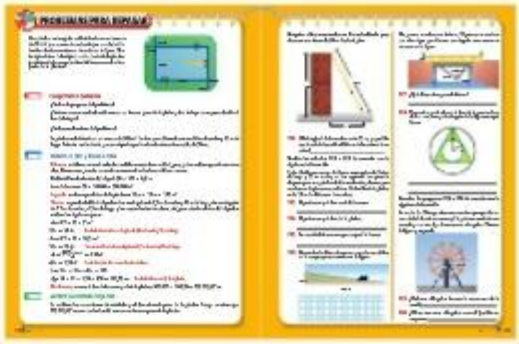
Ejercicios para repasar

Es una selección de actividades de cada tema, para que repases y respondas allí mismo.



Problemas para repasar

Te presenta un problema resuelto acerca de una de las temáticas de la unidad y algunos problemas para que apliques lo aprendido.



Secciones especiales

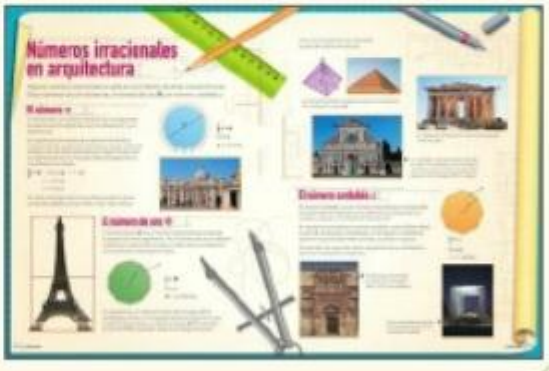
Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?
En ella podrás leer y analizar situaciones que tienen aplicación con la temática estudiada.



Trabaja con
En ella encuentras actividades para que trabajes los temas de la unidad en diferentes programas informáticos.



Hiperpágina
Doble página en la que se abordan los temas de una manera más visual con el propósito de facilitar su comprensión



CONTENIDOS

Pensamientos numérico y variacional

Unidad 1. Conjuntos numéricos 8

- **Números naturales** 10
- **Números enteros** 11
- **Números racionales** 13
- **Números irracionales** 18
- **Números reales** 20
  Números irracionales en la arquitectura 24
- **Ejercicios para repasar** 26
- **Problemas para repasar** 28
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** 30
- **Trabaja con GeoGebra** 32

Unidad 2. Expresiones algebraicas 34

- **Lenguaje algebraico** 36
  Términos algebraicos 36
- **Monomios** 37
  Características de un monomio 37
- **Polinomios** 40
  Características de un polinomio 41
- **Ejercicios para repasar** 46
- **Problemas para repasar** 48
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** 50
- **Trabaja con Microsoft Mathematics** 51

Unidad 3. Operaciones entre polinomios 52

- **Operaciones aditivas entre polinomios** 54
  Adición y sustracción de monomios 54
  Adición y sustracción de polinomios 57
- **Operaciones multiplicativas entre polinomios** 60
  Multiplicación de monomios 60
  Multiplicación de un monomio por un polinomio 62
  Multiplicación de dos polinomios 63
  División de monomios 65
  División de un polinomio entre un monomio 65
  División de un polinomio entre otro polinomio 67
- **Operaciones combinadas entre polinomios** 72
- **Ejercicios para repasar** 74
- **Problemas para repasar** 76
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** 78
- **Trabaja con Ofi Calc** 79

Unidad 4. Productos notables y cocientes notables 80

- **Productos notables** 82
  Cuadrado de un binomio 82
  Cuadrado de un trinomio 85
  Producto de la suma por la diferencia 86
  Producto de dos binomios con un término común 88
  Cubo de un binomio 90
- **El triángulo de Pascal** 93
- **Cocientes notables** 96
- **Ejercicios para repasar** 100
- **Problemas para repasar** 102
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** 104
- **Trabaja con Algebrator** 105

Unidad 5. Factorización 106

- **Concepto de factorización** 108
- **Factorización de monomios** 109
- **Factorización por factor común** 110
- **Factorización de binomios** 115
  Factorización de la diferencia de cuadrados 115
  Factorización de la suma y la diferencia de cubos 117
  Factorización de la suma o la diferencia de potencias de igual base 120
- **Factorización de trinomios** 123
  Factorización de un trinomio cuadrado perfecto 123
  Factorización de un trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción 124
  Factorización de trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ 127
  Factorización de trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ 129
- **Factorización de un cubo perfecto** 131
- **Factorización completa** 133
- **Ejercicios para repasar** 138
- **Problemas para repasar** 140
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** 142
- **Trabaja con Algebrator** 143

 © SANTILLANA

Pensamientos numérico y variacional

Unidad 6. Fracciones algebraicas 144

- **Máximo común divisor y mínimo común múltiplo** 146
  - Máximo común divisor 146
  - Mínimo común múltiplo 149
- **Expresiones algebraicas racionales** 152
  - Simplificación de fracciones algebraicas 153
- **Operaciones entre fracciones algebraicas** 156
  - Adición y sustracción de fracciones algebraicas 156
  - Multiplicación de fracciones algebraicas 164
  - División de fracciones algebraicas 167
  - Operaciones combinadas 170
  - Fracciones complejas 173
- **Ejercicios para repasar** 176
- **Problemas para repasar** 178
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** 180
- **Trabaja con Microsoft Mathematics** 181

Unidad 7. Ecuaciones e inecuaciones 182

- **Ecuaciones** 184
  - Ecuaciones con signos de agrupación 193
  - Ecuaciones con coeficientes racionales 195
  - Ecuaciones con coeficientes literales 196
  - Ecuaciones con fracciones algebraicas 198
  - Fórmulas 205
- **Inecuaciones** 207
  - Desigualdades 207
  - Inecuaciones de primer grado 208
- **Ejercicios para repasar** 214
- **Problemas para repasar** 216
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** 218
- **Trabaja con Microsoft Mathematics** 219

Unidad 8. Función lineal 220

- **Función** 222
- **La recta** 230
  - Pendiente de una recta 230
  - Ecuación de la recta 233
  - Rectas paralelas y perpendiculares 242
- **Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales** 245
  - Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales 245
- **Ejercicios para repasar** 248
- **Problemas para repasar** 250
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** 252
- **Trabaja con Winplot** 253

Pensamientos espacial y métrico

Unidad 9. Geometría 254

- **Ángulos** 256
- **Triángulos** 261
  - Propiedades de los triángulos 261
  - Clasificación de triángulos 264
  - Líneas y puntos notables en un triángulo 267
- **Razonamiento deductivo** 271
  - Generalizaciones falsas y contraejemplos 272
  - Método directo de demostración 273
- **Congruencia** 276
  - Triángulos y congruencia
- **Longitud y área** 280
  - Unidades de longitud 280
  - Unidades de área 282
- **Ejercicios para repasar** 284
- **Problemas para repasar** 286
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** 288
- **Trabaja con GeoGebra** 290

Pensamiento aleatorio

Unidad 10. Estadística y probabilidad 292

- **Definiciones iniciales** 294
- **Caracterización de variables cuantitativas para datos no agrupados** 296
- **Medidas de dispersión** 305
  - Rango 305
- **Caracterización de variables cuantitativas continuas para datos agrupados** 310
- **Conjuntos y eventos** 317
  - Probabilidad y conjuntos 317
- **Principio de multiplicación** 322
- **Ejercicios para repasar** 326
- **Problemas para repasar** 328
- **Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?** 330
- **Trabaja con StadiS 1.05** 332

Glosario 334 Bibliografía 336



1 Conjuntos numéricos

Estándares: pensamientos numérico y variacional

Tu plan de trabajo...

- Identificar las **características de un número** dado.
- **Representar números** en la recta numérica.
- Identificar las **relaciones de inclusión** entre los conjuntos numéricos.
- Realizar las **operaciones entre los números de los distintos conjuntos numéricos.**
- Establecer las **relaciones de orden** entre los elementos de un determinado conjunto numérico.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ Diagnóstica ✓ De desempeño

7 Multimedia **1** Audio

1 Galería **7** Imprimibles

8 Actividades **2** Enlaces web

Lo que sabes...

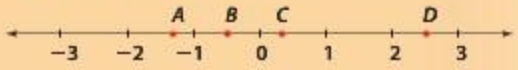
1. Observa la siguiente tabla, que muestra el punto de fusión en grados Celsius (°C) de algunos elementos químicos.

Elemento químico	Punto de fusión (°C)
Fósforo	44
Oxígeno	−218
Potasio	64
Cloro	−101
Hidrógeno	−259

   a. Ordena los elementos teniendo en cuenta el punto de fusión de mayor a menor.

   b. ¿En cuántos grados difiere el punto de fusión del oxígeno con respecto al hidrógeno?

2. ¿Qué fracciones representan los puntos *A*, *B*, *C* y *D* en la recta numérica?



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para conocer con exactitud la hora en cualquier parte de la Tierra.

Conocer la hora en cualquier parte del mundo tiene gran importancia cuando de realizar negocios, invertir en acciones, viajar y pronosticar el clima se trata. Para ello, es necesario utilizar los números racionales, con el fin de calcular la hora exacta de cada ciudad de acuerdo con sus coordenadas geográficas.

Lee más acerca de este tema en la página 30.

Cronología de conjuntos numéricos



Egipto. En el papiro de Rhind aparecieron números enteros y racionales utilizados para medir longitudes, áreas y pesos.

Grecia. La escuela pitagórica descubrió que la diagonal de un cuadrado de arista uno, no se puede escribir como una fracción exacta, lo cual dio origen a los números irracionales.

1650 a. C.

510 a. C.

Italia. Leonardo de Pisa, Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados utilizando una línea divisoria entre el numerador y el denominador.

300 a. C.

1202 d. C.

Alejandría. Euclides, en su obra *Los elementos*, describió cómo la raíz de dos no es un número racional.

1761 d. C.

1900 d. C.



Alemania. Johann Heinrich Lambert logró demostrar que el número π es irracional.

Inglaterra. Bertrand Russell dio una definición formal de número cardinal finito y estableció las propiedades de los conjuntos numéricos.

1. Números naturales

Enlace web

Historia de las matemáticas

Durante mucho tiempo, las matemáticas parecían estar asentadas sobre el sólido terreno de las cantidades finitas, pero hacia finales del siglo V, los matemáticos griegos descubrieron que no era posible expresar la razón entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles y uno de sus lados como la razón de dos números naturales.

Para contar y ordenar los elementos de un conjunto, se utilizan los **números naturales**.

El conjunto de los números naturales se representa con el símbolo $\mathbb{N}$ y se determina de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3,...\}$$

Los números naturales se representan en la recta numérica. Para ello, se ubica a 0 y, a partir de él, se ubican los números, 1, 2, 3,… a igual distancia uno del otro. Así:



1.1 Orden en $\mathbb{N}$

Actividad

Se pueden comparar dos números naturales mediante las relaciones "menor que" o "mayor que". La expresión $a < b$ se lee "a es menor que b" y significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, y la expresión $a > b$ se lee "a es mayor que b" lo que significa que a está a la derecha de b en la recta numérica.

Es posible definir subconjuntos del conjunto de los números naturales, a partir de la relación del orden y la notación de conjuntos, así: $A = \{n/n \in \mathbb{N}, n < 6\}$, el conjunto A esta determinado por comprensión, y se lee "el conjunto de los números n tales que n es un número natural menor que 6".

Por extensión, el conjunto A se expresa como $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Argumento · Soluciono problemas

Enuncia una situación para cada caso.

1. Cuando se utilicen los números naturales, para ordenar los elementos de un conjunto.
2. Cuando sea necesario contar los elementos de un conjunto.

Representa en una recta numérica cada conjunto.

3. $M = \{n/n \in \mathbb{N}, n > 2\}$
4. $P = \{n/n \in \mathbb{N}, n \leq 11\}$
5. $Q = \{n/n \in \mathbb{N}, 3 < n < 12\}$
6. $R = \{n/n \in \mathbb{N}, n > 0\}$
7. $W = \{n/n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq 5\}$
8. $S = \{n/n \in \mathbb{N}, n = 0\}$
9. $Z = \{n/n \in \mathbb{N}, 5 < n < 8\}$
10. $T = \{n/n \in \mathbb{N}, 0 < n < 4\}$
11. $A = \{n/n \in \mathbb{N}, n < 20\}$

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

12. Si a, b y $c \in \mathbb{N}$ y $a < b$ y $b < c$, entonces se cumple $a + b < c$. ( )
13. La diferencia entre dos números naturales siempre es un número natural. ( )

Resuelve.

14. La cantidad de estudiantes de cierto colegio es mayor que 900 y menor que 1.000. Al hacer grupos de 5, 6, 9 y 11 estudiantes, siempre sobra 1. ¿Cuántos estudiantes hay en el colegio?
15. La suma de dos números naturales consecutivos es 29, ¿cuáles son esos números?
16. La diferencia entre dos números naturales es uno. ¿Qué característica deben tener esos números?
17. Un número excede en 5 a otro número, ¿cuál es la diferencia entre ellos?

2. Números enteros

Actividad

Existen situaciones en las que se requiere distinguir una pérdida de una ganancia de dinero, o una altura de una profundidad con respecto al nivel del mar, entre otras. Los números que permiten representar estas situaciones se denominan **números enteros**.



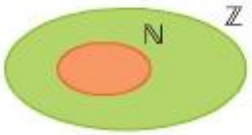
Existen muchas situaciones que se pueden expresar con números enteros, por ejemplo, la profundidad en el mar.

El conjunto de números enteros es una extensión del conjunto de números naturales, ya que está formado por los números naturales junto con sus opuestos (números enteros negativos).

El conjunto de los números enteros se representa con el símbolo $\mathbb{Z}$, y se determina así:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Todos los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ son también elementos del conjunto $\mathbb{Z}$. Así, se dice que $\mathbb{N}$ es subconjunto de $\mathbb{Z}$, es decir, $\mathbb{N}$ está contenido en $\mathbb{Z}$.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Los números enteros se representan en la recta numérica ubicando primero el número 0 como referente; a su derecha se ubican los enteros positivos y a su izquierda los enteros negativos. Cada par de enteros consecutivos están a la misma distancia que se eligió entre 0 y 1.

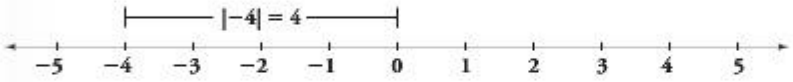
2.1 El valor absoluto

Ampliación multimedia

El **valor absoluto** de un número entero es la distancia que hay entre el número entero y el cero, en la recta numérica.

Si a es un número entero, el valor absoluto de a se expresa con el símbolo $|a|$.

Por ejemplo, el valor absoluto de -4 es 4, ya que hay 4 unidades de distancia entre -4 y 0. Se escribe $|-4| = 4$.



Recuerda que...

El opuesto del número entero a es $-a$. Se cumple que $|a| = |-a|$.

2.2 Operaciones entre los números enteros

Adición: la suma de dos números enteros se realiza como sigue:

- Si los dos números tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y al resultado se le asigna el signo de los números dados.
- Si los números tienen signos diferentes, se halla la diferencia entre sus valores absolutos y al resultado se le asigna el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

Por ejemplo, $-5 + 3 = -2$ porque -5 y 3 tienen signo diferente, entonces, la diferencia entre $|-5|$ y $|3|$ es 2. El resultado tiene signo negativo, porque $|-5| > |3|$ y el signo de -5 es negativo.

Sustracción: la resta de dos números enteros es la suma del primer número entero con el opuesto del segundo número. Es decir, $a - b = a + (-b)$.

Por ejemplo, al restar $8 - 17$, se suma 8 con el opuesto de 17, que es -17. Luego, $8 + (-17) = -9$.

Multiplicación y división:

- El producto o cociente de dos números enteros de igual signo es un número entero positivo cuyo resultado es la multiplicación o división de los valores absolutos de dichos números.
  Por ejemplo:
  $(-10) \cdot (-6) = 60 \quad (-92) \div (-4) = 23$
- El producto o cociente de dos números enteros con signos diferentes es un número entero negativo cuyo resultado es la multiplicación o división de los valores absolutos.
  Por ejemplo:
  $(-19) \cdot (5) = -95 \quad 68 \div (-17) = -4$

> ***Recuerda que...***
> Los signos de agrupación más comunes son:
> ( ) paréntesis
> [ ] corchetes
> { } llaves

2.3 Polinomios aritméticos en Z

Recurso imprimible · Actividad

Un **polinomio** es una expresión en la que se combinan diversas operaciones. Para resolver un polinomio aritmético se tiene en cuenta la jerarquía, el orden de las operaciones y los signos de agrupación.

EJEMPLOS

Resolver cada polinomio aritmético.

a. $9 \cdot 8 \div 6 - 40 + 15$

$9 \cdot 8 \div 6 - 40 + 15$	Polinomio dado.
$= 72 \div 6 - 40 + 15$	Se realiza la multiplicación.
$= 12 - 40 + 15$	Se realiza la división.
$= 12 + (-40) + 15$	Se suma el opuesto de 40.
$= -28 + 15$	Se suma.
$= -13$	

b. $5 - [-11 - (-8 + 1)] \div 2$

$5 - [-11 - (-8 + 1)] \div 2$	Polinomio dado.
$= 5 - [-11 - (-7)] \div 2$	Se realiza la suma dentro del paréntesis.
$= 5 - [-4] \div 2$	Se realiza la resta dentro del corchete.
$= 5 - (-2)$	Se divide.
$= 7$	Se resta.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Completa cada una de las secuencias de números enteros.

18. $-44, -34, -24, __, __, __, __$

19. $30, 24, 18, __, __, __, __$

Resuelve las siguientes operaciones.

20. $5 + (-3) - 6 - (-1)$

21. $[7 - (6 - 2)] - (3 - 1)$

22. $-6 \cdot \{[-32 \div 8 + (9 - 27)] - 14\} - (-2)$

23. $4 \cdot 3 + [5 - 2(8 + 4)] + 6$

Responde.

24. La suma de tres enteros es igual a -5 y dos de los sumandos son números opuestos. ¿Cuál es el otro sumando?

25. El producto de dos números enteros es -540. Si un factor es 12, ¿cuál es el otro factor?

26. Un refrigerador baja su temperatura en 3 °C, cada 20 minutos. Si inicialmente tiene una temperatura de 9 °C, responde. ¿Cuánto tiempo debe pasar para alcanzar una temperatura de -27 °C?

3. Números racionales

Recurso imprimible

El conjunto de los números racionales está formado por los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

El conjunto de los números racionales se simboliza como $\mathbb{Q}$ y se determina como: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$, a se llama numerador y b denominador.

Cada número racional se representa con un único punto en la recta numérica, donde los números racionales positivos se ubican a la derecha del cero y los racionales negativos a la izquierda del cero.

Matemáticamente

Explica por qué todo número entero es un número racional y, sin embargo, no todo número racional es un número entero.

3.1 Orden en el conjunto de los números racionales

Dados los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con b y $d \neq 0$, se puede establecer una y solo una de las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Para determinar la relación de orden entre dos números racionales se transforman los números en fracciones equivalentes de igual denominador. Luego, se determina la relación que existe entre los numeradores de las fracciones equivalentes.

Además si $b > 0$ y $d > 0$, se cumple que: si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces $a \cdot d < b \cdot c$.

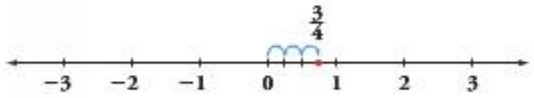
EJEMPLOS

1. Representar en una recta numérica los siguientes números racionales.

a. $\frac{3}{4}$

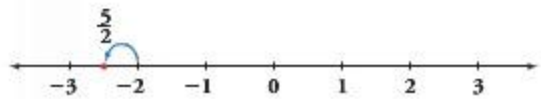
Se divide, en cuatro partes iguales, la unidad entre 0 y 1. Luego, se cuentan tres de esas partes a partir del cero.

Así:



b. $-\frac{5}{2}$

Para representar en la recta numérica $-\frac{5}{2}$, primero, se determina el par de enteros consecutivos entre los cuales está la fracción. Como $-\frac{5}{2}$ está entre -3 y -2, se divide la unidad en dos partes y se cuenta a partir de -2 una parte a la izquierda, como se muestra en la figura.



2. Ordenar de menor a mayor los siguientes números racionales $\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ y $-\frac{5}{4}$.

Primero, se expresan los números como fracciones equivalentes.

$$\frac{3}{4} = \frac{45}{60} \quad -\frac{2}{3} = -\frac{40}{60} \quad \frac{4}{5} = \frac{48}{60} \quad -\frac{5}{4} = -\frac{75}{60}$$

Luego, se ordenan las fracciones equivalentes, así:

$$-\frac{75}{60} < -\frac{40}{60} < \frac{45}{60} < \frac{48}{60}$$

Por tanto, el orden de los números es:

$$-\frac{5}{4} < -\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

3. Para envolver un regalo María emplea $\frac{2}{3}$ del papel y Manuel $\frac{1}{4}$ del papel, ¿quién utilizó más papel?

Se buscan fracciones equivalentes y se comparan:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \text{ y } \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Como $\frac{8}{12} > \frac{3}{12}$, entonces, $\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$.

Luego, María empleó más papel para envolver su regalo.

Actividad Recurso imprimible Ampliación multimedia

3.2 Operaciones con números racionales

Recuerda que...
El recíproco del número racional $\frac{a}{b}$ es el número racional $\frac{b}{a}$, si a y $b \neq 0$.

Adición y sustracción: la suma o resta de dos o más números racionales con igual denominador es un número racional que corresponde a la suma o resta de los numeradores con el mismo denominador. Mientras que la suma o resta de dos números racionales con distinto denominador equivale a la suma o resta de los números racionales equivalentes con igual denominador.

Multiplicación: el producto de dos o más números racionales es otro número racional, cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

División: el cociente entre dos números racionales es el producto del primer número racional con el recíproco del segundo.

EJEMPLOS

1. Realizar las siguientes operaciones.

a. $-\frac{10}{3} + \frac{8}{3}$

$= \frac{-10 + 8}{3}$ Se suman los denominadores ya que el denominador es igual.

$= -\frac{2}{3}$ Se realiza la operación.

b. $-\frac{1}{6} - \frac{5}{14}$

$= -\frac{7}{42} - \frac{15}{42}$ Se obtienen las fracciones equivalentes.

$= -\frac{22}{42}$ Se restan los numeradores.

$= -\frac{11}{21}$ Se simplifica.

c. $-\frac{1}{6} \div \frac{4}{3}$

$= -\frac{1}{6} \times \frac{3}{4}$ Se multiplica por el recíproco de $\frac{4}{3}$.

$= -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}$ Se multiplica y se simplifica.

d. $-\frac{3}{4} + \left\{\frac{1}{5} \times \left[-\frac{3}{8} + \left(-\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$

$= -\frac{3}{4} + \left\{\frac{1}{5} \times \left[-\frac{3}{8} + \left(-\frac{2}{8}\right)\right]\right\}$ Se obtiene la fracción equivalente.

$= -\frac{3}{4} + \left\{\frac{1}{5} \times \left[-\frac{5}{8}\right]\right\}$ Se suma y se elimina el paréntesis.

$= -\frac{3}{4} + \left\{-\frac{5}{40}\right\}$ Se multiplica.

$= -\frac{3}{4} + \left\{-\frac{1}{8}\right\}$ Se simplifica.

$= -\frac{6}{8} + \left\{-\frac{1}{8}\right\}$ Se obtiene la fracción equivalente.

$= -\frac{7}{8}$ Se suma.

2. Leer y responder.

Andrés realizó las siguientes inversiones. Primero, abrió una cuenta bancaria con la mitad del capital. Luego, gastó $\frac{1}{3}$ de lo que le quedaba en un viaje de vacaciones. Por último, donó $280.000 a las personas damnificadas por el invierno.

Si al final quedó con $1.120.000, ¿cuánto dinero tenía Andrés antes de hacer las inversiones?



Para resolver el problema, se realizan las operaciones inversas del final hacia el comienzo, como sigue:

- Donó $280.000, antes tenía:
  $1.120.000 + 280.000 = 1.400.000$
- Gastó $\frac{1}{3}$, le queda $\frac{2}{3}$ de lo que tenía, así:
  $\frac{3}{2} \times 1.400.000 = 2.100.000$
- Invirtió la mitad, es decir, $\frac{1}{2}$.

Luego, al principio tenía $2 \times 2.100.000 = 4.200.000$.

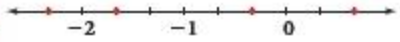
Por tanto, Andrés tenía $4.200.000 antes de hacer las inversiones.

Afianzo COMPETENCIAS

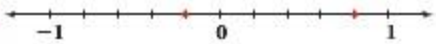
Interpreto · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Escribe los números racionales representados en cada recta.

27.



28.



Ordena de mayor a menor cada grupo de números racionales. Luego, relaciona cada número con la letra correspondiente y determina el nombre de un lugar único de Colombia.

29.

$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
A	R	A	O	M	P

30.

$-\frac{13}{8}$	$-\frac{8}{5}$
E	D

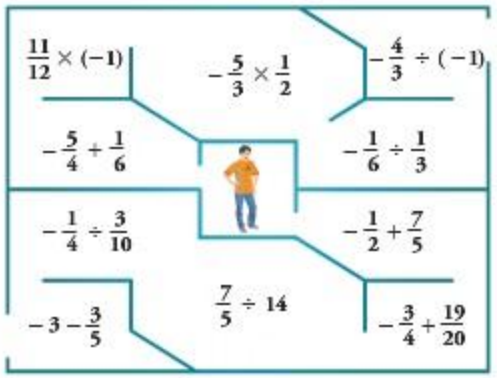
31.

$-\frac{11}{5}$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{43}{45}$	$-\frac{3}{5}$
A	M	S	U	Z	P	A



32. ¿Cuál es el nombre del lugar?

33. Resuelve las operaciones del laberinto. Luego, determina el camino a la salida, siguiendo los resultados de menor a mayor.

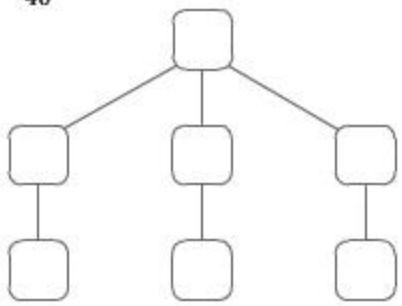


Resuelve las siguientes operaciones.

34. $-\frac{1}{2} + \left\{\left[\frac{3}{7} - \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\right)\right] - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4} \times \frac{1}{7}\right)\right\}$

35. $\left\{\left[\frac{5}{3} - \left(-\frac{2}{5}\right)\right] - \frac{4}{3} \div \frac{1}{2}\right\} \times \left(-\frac{3}{5} + \frac{7}{2}\right)$

36. Ubica cada uno de los números racionales $\frac{7}{4}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{14}{20}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$; en cada cuadro de tal forma que el producto en cada rama sea igual a $-\frac{7}{40}$.



Lee y resuelve.

37. Si un ladrillo pesa 1 kilogramo y medio ladrillo. ¿Cuánto pesa ladrillo y medio?

38. El área de hielo del monte Kilimanjaro se ha reducido en $\frac{2}{5}$, los glaciares del monte Kenya se han reducido en $\frac{3}{4}$ de su superficie y los glaciales del Cáucaso, en Rusia, han disminuido su superficie en $\frac{1}{2}$. ¿Qué lugar ha perdido más hielo en su superficie?

Lee y responde.

Tomás ha gastado $\frac{1}{5}$ de sus ahorros en un vestido, $\frac{2}{3}$ en un par de zapatos y $\frac{1}{8}$ en una blusa. Si en total tenía $1.200.000:

39. ¿Qué fracción representa la parte del dinero que gastó?

40. ¿Cuánto dinero empleó en la compra de cada uno de los artículos?

41. ¿Cuánto dinero le quedó a Tomás después de las compras?

42. Si el costo de una chaqueta es $650.000, ¿puede comprar la chaqueta con $\frac{1}{2}$ del dinero que tenía inicialmente?

3.3 Representación decimal de un número racional

Recurso imprimible

Los números racionales se pueden representar en forma de número decimal dividiendo el numerador entre el numerador. Los números decimales obtenidos de esta forma pueden ser:

Actividad

- **Números decimales finitos:** son los números decimales que tienen una cantidad exacta de cifras decimales.
- **Números decimales infinitos periódicos:** son los números decimales que tienen una o varias cifras que se repiten indefinidamente, a las cuales se definen como **período**.

Los números decimales infinitos periódicos se clasifican como decimales periódicos puros, cuando el periodo comienza a partir de la primera cifra decimal, y decimales periódicos mixtos, cuando hay una o varias cifras que no se repiten después de la coma y el período se repite después.

3.4 Representación fraccionaria de un número decimal

Ampliación multimedia

Matemáticamente

¿En qué condiciones una fracción corresponde con un número decimal finito?

Para escribir un número decimal en forma de fracción se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Si el número es decimal finito se plantea una fracción, donde el numerador corresponde al número decimal sin la coma y el denominador es una potencia de 10, cuyo exponente coincide con la cantidad de cifras decimales del número.
- Si el número es decimal periódico, se plantean ecuaciones de tal manera que se elimine el período y se determine la fracción requerida.

EJEMPLOS

1. Expresar $\frac{9}{4}$ y $-\frac{4}{3}$ como números decimales. Luego, escribir el tipo de número decimal.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \hline 10 & 2,25 \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \qquad \frac{9}{4} = 2,25$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline 10 & 1,333 \\ 10 & \\ 10 & \\ 1 & \end{array} \qquad -\frac{4}{3} = -1,33\ldots$$

Por tanto, $\frac{9}{4} = 2,25$ y es un número decimal finito.

Además, $-\frac{4}{3} = -1,333\ldots = -1,\overline{3}$ y es un número decimal infinito periódico puro.

2. Escribir en forma de fracción cada número.

a. $-1,55\ldots$

$x = -1,55\ldots$ Se representa el número decimal.

$10x = -15,55\ldots$ Se multiplica por 10.

$10x - x = -15,55\ldots - (-1,55\ldots)$ Se restan las ecuaciones.

$9x = -14$ Se realizan las restas.

$x = -\frac{14}{9}$ Se divide entre 9.

Por tanto, el número decimal $-1,55\ldots$ se expresa como $-\frac{14}{9}$.

b. $4,12$

$4,12 = \frac{412}{10^2}$ Se expresa como fracción.

$\frac{412}{100} = \frac{103}{25}$ Se simplifica.

Por tanto, 4,12 en fracción es $\frac{103}{25}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Argumento · Propongo · Soluciono problemas

Escribe un número decimal que cumpla con las condiciones dadas.

43. Un número decimal asociado al número racional $-\frac{5}{8}$.

44. Un número decimal infinito periódico puro mayor que $\frac{9}{2}$.

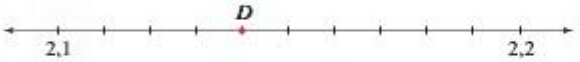
45. Un número decimal finito menor que -4 y mayor que -5.

Anota el número decimal representado en cada gráfica.

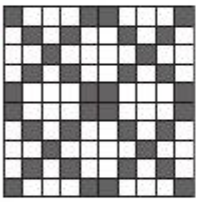
46.



47.



48.



49.



Expresa cada número decimal de la forma $\frac{a}{b}$. Luego, une los puntos para encontrar la ruta de ascenso a la cima (siguiendo el orden de los ejercicios).

50. 0,8

51. 2,75

52. $-0,66\ldots$

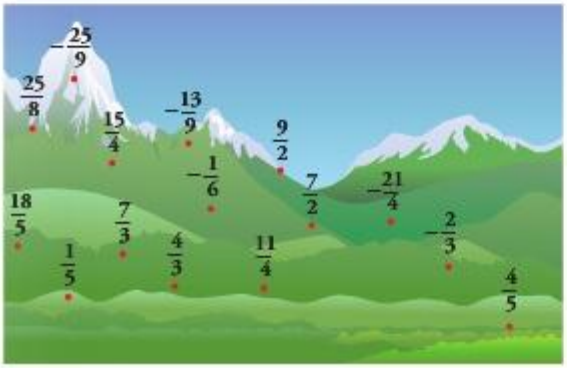
53. 3,5

54. 4,5

55. $-1,44\ldots$

56. 3,75

57. $-2,77\ldots$



Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

58. Todo número entero es un número decimal. ( )

59. Existe un decimal finito cuya expresión fraccionaria es $\frac{a}{3}$. ( )

60. No existe ningún número entero a tal que la fracción $\frac{a}{5}$, represente un número decimal infinito periódico puro. ( )

Observa y resuelve.

$$0,\overline{6} = \frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$4,\overline{19} = \frac{419-4}{99} = \frac{415}{99}$$

61. Verifica la expresión fraccionaria de cada decimal.

62. Formula una regla asociada a la conversión de un número decimal a fracción. Luego, compruébala.

Lee y responde.

El calentamiento global ocasiona el deshielo de los glaciales, aumentando el nivel del mar. El deshielo de los glaciales de Alaska, aporta $\frac{7}{50}$ mm anuales al aumento del nivel del mar, el deshielo de Groenlandia produce un aumento de $\frac{13}{100}$ mm y, en el mar Amundsen, Antártida, aporta $\frac{1}{5}$ mm.



63. ¿Qué cantidad decimal de milímetros aumenta el nivel del mar en cada lugar?

64. ¿Cuál de los tres glaciales afecta más el aumento anual del nivel del mar?

65. ¿En cuánto aumentó el nivel del mar en total al considerar los tres lugares?

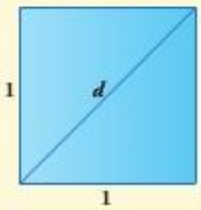
4. Números irracionales

Ampliación multimedia

Actividad

Historia de las matemáticas

Los pitagóricos afirmaban que todos los números podían ser expresados como el cociente de dos números naturales. Sin embargo, no lograban encontrar los números adecuados para expresar la medida de la diagonal del cuadrado de lado 1.



$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Enlace web

Algunos números decimales no pueden ser representados como números racionales de la forma $\frac{a}{b}$.

Por ejemplo, el número $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ es un número decimal con infinitas cifras decimales, además no presenta ningún tipo de periodicidad.

El conjunto de los **números irracionales** se simboliza con la letra $\mathbb{I}$ o por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y está formado por todos los números decimales infinitos no periódicos.

Los números $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, \sqrt[3]{2}$, Log 2 son ejemplos de números irracionales, ya que en su representación decimal, tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$ $\quad \sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$ $\quad \pi = 3{,}14159\ldots$

$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ldots$ $\quad \text{Log } 2 = 0{,}30102\ldots$

4.1 Representación en la recta numérica de los números irracionales

Ampliación multimedia

En la recta numérica, a los puntos que no les corresponde un número racional, les corresponde un número irracional. A cada número irracional le corresponde un punto sobre la recta numérica.

Es posible representar algunos números irracionales utilizando construcciones geométricas.

Por ejemplo, para ubicar en la recta numérica, el número irracional $\sqrt{2}$ se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se construye $\overline{AB}$ con A en 0 y B en 1.
- **Segundo,** se traza el segmento $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{AB}$ de longitud 1.
- **Tercero,** se une A con C para formar $\overline{AC}$.

La medida de $\overline{AC}$ se halla aplicando el teorema de Pitágoras. Así:

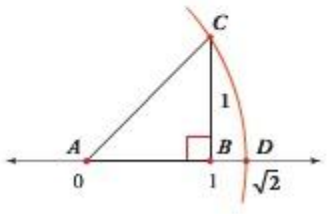
$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ Se aplica el teorema.

$(AC)^2 = 1^2 + 1^2$ Se remplazan las medidas de cada cateto.

$(AC)^2 = 2$ Se resuelven las operaciones.

$AC = \sqrt{2}$ Se halla la raíz cuadrada.

- **Por último,** con un compás, se hace centro en A y se toma la distancia AC. Luego, con esta distancia, se traza un arco que corte la recta numérica. El punto corresponde a $\sqrt{2}$.



Representación de $\sqrt{5}$

Para ubicar $\sqrt{5}$, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se construye $\overline{AB}$ con A en 0 y B en 2.
- **Segundo,** se traza el segmento $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{AB}$ de longitud 1.
- **Tercero,** se une A con C para formar $\overline{AC}$.

La medida de $\overline{AC}$ se halla aplicando el teorema de Pitágoras.

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ Se aplica el teorema.

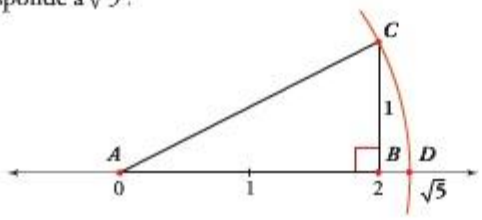
$(AC)^2 = 2^2 + 1^2$ Se remplazan las medidas de los catetos.

$(AC)^2 = 5$ Se resuelven las operaciones.

$AC = \sqrt{5}$ Se halla la raíz cuadrada.

- **Por último,** con un compás, se hace centro en A y se toma la distancia AC. Luego, con esta distancia, se traza un arco que corte la recta numérica.

Este punto corresponde a $\sqrt{5}$.



Matemáticamente

Comprueba o refuta la siguiente afirmación.

Todo número irracional se puede representar con regla y compás.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Marco con un ✓ los números irracionales. Justifica tu respuesta.

66. 0,100100100…

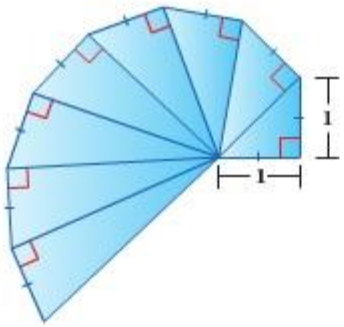
67. 0,623462346223…

68. 3,1421142214231424…

69. $-\sqrt{10} + 5$

70. $3\pi - 7$

71. Escribe los números irracionales que pueden aparecer en la siguiente figura.



Aplica el procedimiento para ubicar $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ en la recta numérica, con el fin de determinar el punto de la recta asociado a cada número.

72. $\sqrt{10}$ **73.** $-\sqrt{3}$ **74.** $\sqrt{8}$

Lee y resuelve.

El número de oro $\left(\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, se aprecia en la naturaleza, por ejemplo, la longitud del abdomen de una abeja dividido por el número ϕ es igual a la longitud del tórax, y la longitud del tórax dividido entre ϕ es igual a la longitud de la cabeza.



75. Realiza la construcción con regla y compás del número ϕ.

76. Si el abdomen de una abeja mide 1,2 cm, ¿cuánto mide su cabeza?

5. Números reales

Ampliación multimedia | Recurso imprimible | Actividad

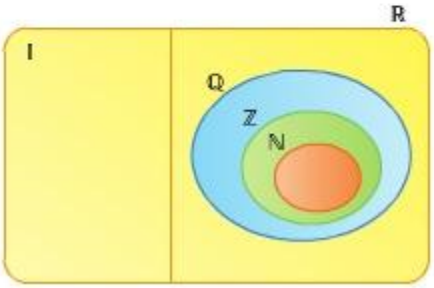
Cuando se une el conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales, se forma el conjunto de los **números reales**.

Por tanto, los números reales son todos los números que se pueden expresar como un decimal, en algunos casos como decimal finito o periódico y en otros, como decimal infinito no periódico.

El conjunto de los números reales se simboliza con $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \text{ donde } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

En el diagrama de la figura, se muestra la representación de los conjuntos numéricos y las relaciones de inclusión entre ellos.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Representación de los números reales en la recta numérica

Existe una correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta numérica, donde a cada punto de la recta le corresponde un único número real y a cada número real le corresponde solamente un punto en la recta numérica. Por tal razón a la recta numérica se le llama recta real.

EJEMPLOS

1. Determinar si las siguientes relaciones de pertenencia son verdaderas o falsas.

a. $0{,}2\overline{5} \in \mathbb{Q}$

Es verdadera. Porque $0{,}2\overline{5}$ es un número decimal infinito periódico.

b. $\sqrt{144} - \sqrt{25} \in \mathbb{I}$

Es falsa. Porque $\sqrt{144} - \sqrt{25} = 7$ y 7 es un número racional que es entero. Luego, 7 no es un número irracional.

c. $e \notin \mathbb{Z}$

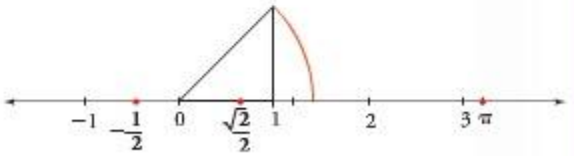
Es verdadero. Porque el número $e = 2{,}7182818284\ldots$ es un número irracional, ya que es un número decimal infinito no periódico. Por tanto, el número e no pertenece al conjunto de los números enteros.

2. Ubicar en la recta numérica los números reales $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y π.

Primero, se ubica $-\frac{1}{2}$ en el punto medio del segmento que forman los puntos de -1 y 0.

Luego, para $\frac{\sqrt{2}}{2}$, se construye $\sqrt{2}$ y se toma el punto medio entre 0 y $\sqrt{2}$.

Por último, se localiza el número irracional π en forma aproximada. Así:



5.1 Operaciones y propiedades en los reales

Ampliación multimedia

En el conjunto de los números reales, las operaciones de la adición y la multiplicación cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad	Adición	Multiplicación
Clausurativa	Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces, $a + b \in \mathbb{R}$	Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces, $a \times b \in \mathbb{R}$
Conmutativa	Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces, $a + b = b + a$	Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces, $a \times b = b \times a$
Asociativa	Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces, $a + (b + c) = (a + b) + c$	Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
Modulativa	$a + 0 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$. El módulo de la adición es 0.	$a \times 1 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$. El módulo de la multiplicación es 1.
Del inverso	$a + (-a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$.	Para todo $a \neq 0$. $a \times \frac{1}{a} = 1$
Distributiva	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ para todo $a, b, c, \in \mathbb{R}$.	

EJEMPLOS

1. Realizar las siguientes operaciones.

a. $2\sqrt{7} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{7} - 8\sqrt{3}$

Primero, se aplica la propiedad asociativa:

$(2\sqrt{7} - 6\sqrt{7}) + (5\sqrt{3} - 8\sqrt{3})$

Luego, se utiliza la propiedad distributiva:

$\sqrt{7}(2 - 6) + \sqrt{3}(5 - 8)$

Después, se aplica la propiedad clausurativa:

$\sqrt{7}(-4) + \sqrt{3}(-3)$

Por último, se aplica la propiedad conmutativa:

$-4\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

Por tanto, $2\sqrt{7} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{7} - 8\sqrt{3}$ es igual a $-4\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$.

b. $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} - 2)$

Primero, se aplica la propiedad distributiva:

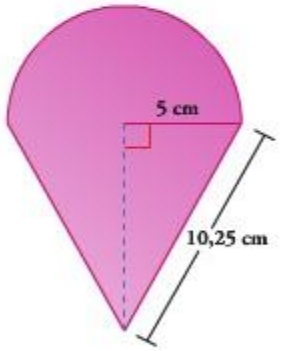
$\sqrt{3}(\sqrt{12} - 2) = \sqrt{3 \cdot 12} - 2\sqrt{3} = \sqrt{36} - 2\sqrt{3}$

Después, se extrae la raíz cuadrada de 36:

$6 - 2\sqrt{3}$

Por tanto, $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} - 2) = 6 - 2\sqrt{3}$

2. Hallar el perímetro de la figura.



Como la figura está delimitada por una semicircunferencia de radio $r = 5$ cm y dos lados de 10,25 cm de longitud cada uno, entonces el perímetro de la figura está dado por: $P = \pi \cdot r + l + l$

Al remplazar r por 5 y l por 10,25, se tiene:

$P = \pi \cdot (5) + 10{,}25 + 10{,}25$

Luego, al aplicar las propiedades de las operaciones, se obtiene:

$P = 5\pi + 20{,}5$

Por tanto, el perímetro de la figura es $(5\pi + 20{,}5)$ cm.

Actividad Recurso imprimible

5.2 Orden en el conjunto de números reales

Al comparar dos números reales se cumple una y solo una de las siguientes posibilidades.

$a < b$, a es menor que b; $a > b$, a es mayor que b o $a = b$, a es igual que b.

Desigualdades: una desigualdad es una expresión de la forma $x > a$ o $x \geq a$ o $x < a$ o $x \leq a$, en la que x es una variable y a es un número real. Por ejemplo, $x < -3$ y $x \geq \sqrt{5}$ son desigualdades.

> ***Recuerda que...***
> $c > 0$, significa que c representa un número real positivo; $c < 0$, significa que c representa un número real negativo.

Propiedades de las desigualdades

Las desigualdades cumplen las siguientes propiedades, si a, b y $c \cdot \mathbb{R}$.

1. Si $a < b$ y $b < c$, entonces, $a < c$.
2. Si $a < b$, entonces, $a + c < b + c$.
3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces, $a \cdot c < b \cdot c$.
4. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces, $a \cdot c > b \cdot c$. Es decir, la desigualdad cambia de sentido cuando se multiplica por un número negativo.

A partir de los signos de las desigualdades es posible construir subconjuntos de los números reales y representarlos en la recta real. A estos subconjuntos se les denomina intervalos. Por ejemplo, la desigualdad $x < 3$, se representa en la recta numérica así:



EJEMPLOS

1. Determinar la relación entre cada par de expresiones.

a. Si $c < d$, entonces comparar $-5 + c$ y $-5 + d$

Como $c < d$, entonces al aplicar la propiedad 2 de las desigualdades se tiene:

$-5 + c < -5 + d$

b. Si $c < d$, entonces comparar $-3c$ y $-3d$

Como $c < d$ y $-3 < 0$, entonces al aplicar la propiedad 4, se tiene:

$-3 \cdot c > -3 \cdot d$

Por tanto, $-3c > -3d$

c. Si $c < d$ y $d < 8$ entonces comparar c y 8.

Como $c < d$ y $d < 8$ al aplicar la primera propiedad de las desigualdades se tiene:

$c < 8$.

d. Si $0 < c < d$ entonces comparar $\frac{1}{c}$ y $\frac{1}{d}$.

Aplicando la propiedad 3 se tiene $\frac{0}{cd} < \frac{c}{cd} < \frac{d}{cd}$ es decir $0 < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}$.

2. Representar el conjunto de números reales que cumplen cada desigualdad.

a. $x > -1$

El conjunto de números reales mayores que -1, sin incluir a -1 es:



b. $x \leq 0{,}5$

El conjunto de números reales menores que 0,5, incluyendo a 0,5 es:



c. $-2 \leq x < \frac{3}{2}$

El conjunto de números reales mayores o iguales que -2 y menores que $\frac{3}{2}$ es



d. $2x + 1 < 3$

Utilizando las propiedades de las desigualdades, se muestra que $2x + 1 < 3$ equivale a $x < 1$. Su representación es



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Escribe V, si el enunciado es verdadero o F, si es falso.

77. Todo número real se corresponde con un único punto de la recta y todo punto de la recta se corresponde con un número real. ( )

78. Un número real puede ser racional e irracional al mismo tiempo. ( )

79. La expresión $x \leqslant y$, con x y y números reales se puede interpretar como x es menor o igual a y. ( )

E Realiza las siguiente operaciones.

80. $-3 + 4\sqrt{2} + \frac{5}{2}$

81. $0,\widehat{1} + \frac{1}{4} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$

82. $\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\right)$

83. $\left(\frac{2}{7}\right) \times \sqrt{2} \times \sqrt{18}$

84. $(6 - 8\sqrt{2}) \div 4$

85. $(\sqrt{5} - 4) \times (\sqrt{5} + \sqrt{2})$

Muestra en cada caso dos números que cumplan las condiciones pedidas.

86. Reales irracionales, entre 3 y 5.

87. Reales racionales, no periódicos entre 6 y 7.

88. Reales naturales mayores que 10.

89. Reales enteros no positivos.

R Si p es un número racional y q es un número irracional.

90. ¿Qué condición deben cumplir para que $p + q$ sea irracional?

91. ¿En qué caso $p \cdot q$ es racional? ¿En cuál es irracional?

E Escribe $>$, $<$ o $=$ según corresponda.

92. $-\sqrt{2} \square 0,5$

93. $-7 \square -\sqrt[3]{343}$

94. $\sqrt[3]{65} \square \pi$

95. $0,02 \square \sqrt{2}$

96. $-\sqrt{3} \square 8$

97. $\frac{2}{15} \square 0,1\widehat{3}$

98. $2,23 \square \frac{11}{5}$

99. $-\sqrt{\frac{1}{2}} \square 1,11$

100. $3 \square 0,0\widehat{2}$

101. $5 \square \frac{1}{3}$

E Resuelve cada desigualdad y dibuja el respectivo intervalo.

102. $2x - 5 > 1$

103. $3x - 2 < 7$

104. $5x + 1 \leqslant 16$

105. $4x + 1 \geqslant 13$

106. $x + 8 \leqslant 12$

107. Completa la siguiente demostración, colocando el nombre de la propiedad que permite realizar cada paso.

$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$ _____

$= a \cdot 0 + a \cdot 0$ _____

$= a \cdot 0 + a \cdot 0 + 0$ _____

$= a \cdot 0 + a \cdot 0 + (a \cdot 0 - a \cdot 0)$ _____

$= (a \cdot 0 + a \cdot 0 + a \cdot 0) - a \cdot 0$ _____

$= a\,(0 + 0 + 0) - a \cdot 0$ _____

$= a \cdot 0 - a \cdot 0$ _____

$= 0$ _____

Luego, si $a \cdot$ $\mathbb{R}$; $a \cdot 0 = 0$

S El área de un triángulo equilátero se puede calcular mediante la expresión

$$A = \frac{\sqrt{3}\,L^2}{4}$$

Donde L es la medida del lado del triángulo.

108. Si el lado de un triángulo equilátero mide 6 cm y el lado de un segundo triángulo mide 4 cm, ¿cuántas veces es el área del primer triángulo con respecto a la del segundo?

109. ¿En qué casos el área toma valores irracionales?

R 110. Completa el cuadro mágico de modo que al multiplicar los números de cada fila, columna y diagonal, resulte un mismo número.

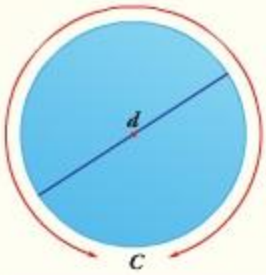
16		-4
	-2	
-1		0,25

Números irracionales en arquitectura

Algunos números irracionales se aplican en el diseño de obras arquitectónicas. Estos números son: el número π, el número de oro Φ y el número cordobés c.

El número π

El número π es un número irracional que corresponde a la razón entre la longitud de una circunferencia (C) y su diámetro (d).



$\frac{C}{d} = \pi$

Donde

$\pi = 3{,}14159...$

En arquitectura el número π se aplica en el diseño y construcción de cúpulas. Por ejemplo, la cúpula central de la Basílica de San Pedro diseñada por Miguel Angel, tiene un diámetro de 42,5 m. Así, para hallar la longitud de su circunferencia se realiza:

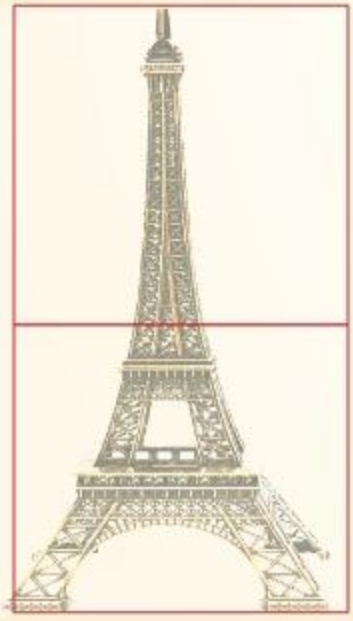
$\frac{C}{d} = \pi \longrightarrow C = d\pi$

$C = 42{,}5\pi$

$C \approx 133{,}5$

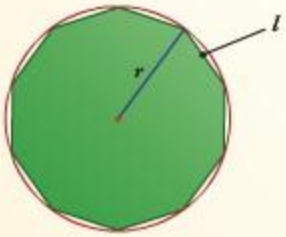
Por tanto, la longitud de la circunferencia de la cúpula central de la Basílica de San Pedro mide 133,5 metros.





El número de oro Φ

El número de oro Φ es un número irraccional que resulta de la proporción entre segmentos. Así, el número de oro se obtiene al plantear la razón entre el lado y el radio de la circunferencia circunscrita de un decágono regular.



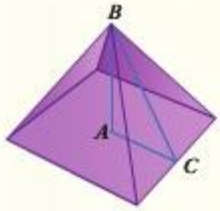
$\frac{r}{l} = \Phi$

Donde

$\Phi = 1{,}6180339...$

En arquitectura, se utiliza el número de oro para definir rectángulos áureos. Un rectángulo áureo es aquel en el que la razón entre su base y su altura es igual a Φ. Por ejemplo, en la Torre Eiffel se pueden observar rectángulos áureos.

Otras obras arquitecónicas diseñadas a partir del número de oro son:





En la pirámide de Keops, en Egipto, la razón entre el apotema *BC* y la altura *BA* es igual a Φ.



En el Partenón de Atenas, en Grecia, el rectángulo *XYWZ* es áureo.



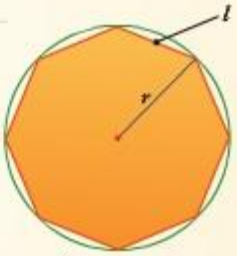
En la Basílica de Santa María Novella, en Italia, los elementos de la fachada se relacionan unos con otros, en proporción áurea. Así, el rectángulo *MNOP* es áureo.

El número cordobés *c*

El número cordobés *c* es un número irracional que corresponde a la razón entre el radio de la circunferencia circunscrita en un octágono regular y la medida del lado de este.

En arquitectura se aplica el número cordobés *c* para diseñar obras a partir de rectángulos cordobeses. Un rectángulo cordobés es aquel en el que la razón entre su base y su altura es igual a *c*.

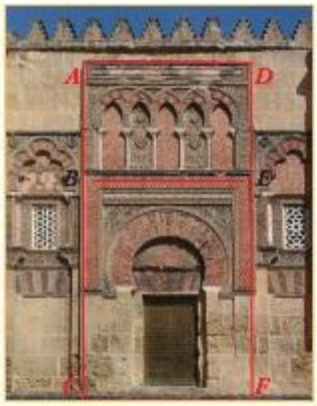
Por ejemplo, las siguientes obras arquitectónicas se diseñaron a partir de rectángulos cordobeses.



$\frac{r}{l} = c$

Donde:

$c = 1{,}306562...$



En la Mezquita de Córdoba, en España, los rectángulos *ABED* y *CBFE* son cordobeses.



El Arco de la Defensa de París está diseñado a partir de un rectángulo cordobés.

EJERCICIOS PARA REPASAR

Números naturales

Determina por extensión cada uno de los siguientes conjuntos.

111. $A = \{n \in \mathbb{N} : 7 \leq n < 19\}$

112. $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es divisor de } 60\}$

113. $C = \{n \in \mathbb{N} : 24 > n, n \text{ impar}\}$

Completa cada espacio con el símbolo correspondiente (>, < o =).

114. $37 - 12 \square 16 + 8$

115. $25 \times 4 \square 100 \div 2$

116. $40 - 6 \square 70 \div 2$

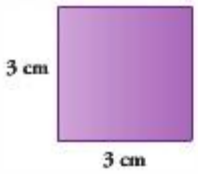
117. $4 \times 7 + 2 \square 17 \times 2 - 4$

118. $(17 + 13) \div 5 \square 8 \times 5 - 37$

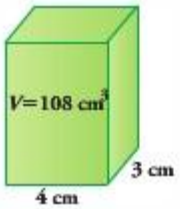
119. $\frac{(22 + 23)}{(7 + 8)} \square \frac{(7 \times 6 - 2)}{(2 \times 3 + 4)}$

Resuelve los siguientes problemas.

120. El área del cuadrado es _____



121. La altura de la caja es _____



122. Encuentra dos números entre 100 y 200 para los cuales, el residuo al dividirlos entre 2, 3, 4 y 5 siempre es 1.

_____

_____

_____

_____

_____

Números enteros

Desarrolla cada polinomio teniendo cuenta que $a = -1$; $b = -2$ y $c = 2$.

123. $3 - 2 \times a + 5 \times b - c$

_____

124. $a \times 4 - 10 \div b - 8 \div c$

_____

125. $13 - 3 \times [(a - b) \times (b - c)]$

_____

126. $(-2 \times a + b) - (c \times b - 3 \times a)$

_____

127. $11 - \{a + [(2 - 3 \times b) - (c + 4 \times 2)]\}$

_____

Representa cada conjunto de enteros en la recta numérica.

128. $A = \{n \in \mathbb{Z} / n \text{ es par}, -8 \leq n < 7\}$

129. $B = \{n \in \mathbb{Z} / n^2 + 1 \leq 26\}$

130. $C = \{n \in \mathbb{Z} / n \text{ múltiplo de 2 o 3}, -20 \leq n \leq 9\}$

131. $D = \{n \in \mathbb{Z} / |n| \leq 4\}$

Números racionales

Resuelve las siguientes operaciones.

132. $\frac{2}{3} - \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{4}\right)$

133. $\left(-\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\right) \div \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{6}\right)$

134. $\left[\left(3 - \frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{7}{6}\right)\right] \div \frac{15}{2}$

Soluciona el siguiente problema.

Un colegio realiza una expedición por Colombia: $\frac{1}{3}$ de los estudiantes van al departamento de Antioquia, $\frac{2}{15}$ de los estudiantes viajan a La Guajira y $\frac{2}{5}$ viaja al Eje Cafetero.

135. ¿Qué fracción representa a los estudiantes que viajaron en total?

_____

136. ¿Qué fracción representa los estudiantes que no viajaron?

_____

Relaciona cada número racional con su respectiva representación decimal.

137. $\frac{3}{4}$	**a.** $0,7\overline{5}$
138. $\frac{4}{9}$	**b.** $0,58\overline{3}$
139. $\frac{7}{12}$	**c.** 0,625
140. $\frac{5}{6}$	**d.** 0,75
141. $\frac{34}{45}$	**e.** $0,\overline{4}$
142. $\frac{5}{8}$	**f.** $0,8\overline{3}$

Números irracionales

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa de acuerdo con la siguiente información.

Si a y b son números naturales tales que $x = \sqrt[b]{a}$ no es exacta (no es un número natural) entonces x es un número irracional.

143. $\sqrt[9]{512}$ es irracional ( )

144. $\sqrt[7]{49}$ es irracional ( )

145. $\sqrt[5]{100}$ es irracional ( )

Representa en la recta los siguientes números.

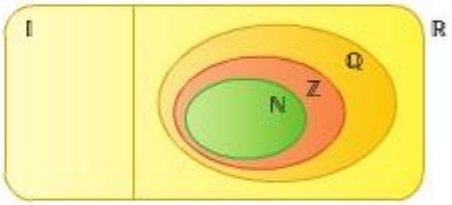
146. $\sqrt{13}$

147. $-\sqrt{10}$

Números reales

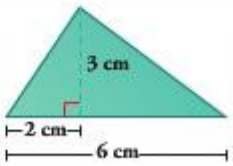
148. Ubica los siguientes números en el diagrama de Venn.

$-\frac{7}{4}$; 1,41; -4, $=+1$; $\sqrt[3]{216}$; $3\sqrt{2}$; 0; $1,2\overline{4}$; 2; $\sqrt[4]{7}$

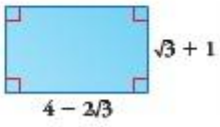


Encuentra el perímetro de cada figura.

149.



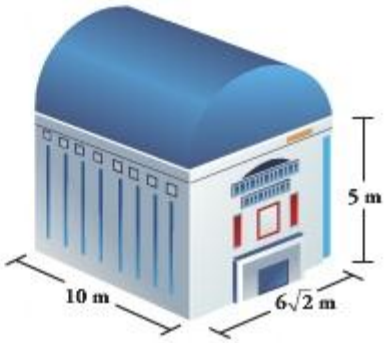
150.



PROBLEMAS PARA REPASAR

Un auditorio de artes en un colegio tiene una estructura en forma de paralelepípedo recto, con base rectangular y techo semicilíndrico, como se muestra en la figura.

Si las dimensiones del auditorio son 10 m, $6\sqrt{2}$ m y 5 m, ¿cuál es el volumen del auditorio de artes?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es el volumen del auditorio de artes?

¿Cuáles son los datos del problema?

La forma del auditorio es un paralelepípedo recto, con base rectangular y techo semicilíndrico, cuyas dimensiones son: 10 m, $6\sqrt{2}$ m y 5 m.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se hallan las dimensiones del semicilindro, para encontrar su volumen. El radio del semicírculo es la mitad de $6\sqrt{2}$. Es decir,

$$r = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

La longitud del tronco del semicilindro es 10 m, que corresponde al largo del paralelepípedo.

Segundo, se calcula el volumen de cada sólido que forma la estructura, así: el volumen del semicilindro se determina hallando primero el volumen del cilindro, luego, dividiéndolo entre 2.

$V_c = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot l}{2}$ Se aplica la fórmula del volumen de un cilindro.

$V_c = \frac{\pi \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot (10)}{2}$ Se remplazan r y l.

$V_c = 90\pi$ Se resuelven las operaciones.

Ahora, el volumen del paralelepípedo es:

$V_p = l \cdot a \cdot h$ Se aplica la fórmula del volumen de un paralelepípedo recto.

$V_p = 10 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 5$ Se remplazan l, a y h.

$V_p = 300\sqrt{2}$

Por último, el volumen total del auditorio es:

$V = V_c + V_p$ Se plantea el volumen del auditorio.

$V = 90\pi + 300\sqrt{2}$ Se remplazan V_c y V_p.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones son correctas. Luego, se tiene que el volumen del auditorio es $(90\pi + 300\sqrt{2})$ m^3.

Responde las preguntas 151 a 153 de acuerdo con la siguiente tabla sobre información de las superficies de algunos departamentos de Colombia.

Departamento	Superficie (en km²)
Amazonas	109.665
Antioquia	63.612
Atlántico	3.388
Chocó	46.530
Quindío	1.845
Vichada	100.242

151. ¿Cuál es la superficie total de los departamentos relacionados en la tabla?

152. ¿Cual es la diferencia entre el departamento de mayor extensión y el de menor extensión de los citados en la tabla?

153. La superficie de nuestro país es de 1.141.748 km², además Amazonas y Vichada son los departamentos de mayor extensión. ¿Qué fracción de la superficie del país representan estos dos departamentos?

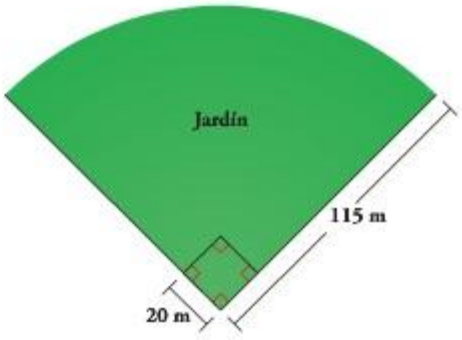
El lugar que se halla a mayor profundidad de la Tierra es el abismo Challenger, en las fosas Marianas, que se ubica a 11.034 m bajo el nivel del mar. El monte Everest, ubicado en el Himalaya, es la montaña más alta del mundo con 8.848 m sobre el nivel del mar.

154. ¿Cuál es la diferencia en metros, entre los dos lugares anteriormente mencionados?

155. En un pequeño pueblo $\frac{13}{24}$ de la población son mujeres y de ellas $\frac{2}{5}$ son menores de edad. Respecto a los hombres, $\frac{6}{11}$ son menores de edad. Si la población tiene 2.400 habitantes, ¿cuántos hombres menores de edad hay en esta población?

Resuelve las preguntas 156 a 158 con la siguiente información.

Un campo de entrenamiento para béisbol tiene la forma de un sector circular que corresponde a un cuarto de círculo, como lo muestra la gráfica.



Calcula.

156. El perímetro del campo de entrenamiento.

157. El área del campo de entrenamiento.

158. El área de la superficie del jardín.

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para conocer con exactitud la hora en cualquier parte de la Tierra.

Conocer la hora en cualquier parte del mundo tiene gran importancia cuando de realizar negocios, invertir en acciones, viajar y pronosticar el clima se trata. Para ello, es necesario utilizar los números racionales, con el fin de calcular la hora exacta de cada ciudad de acuerdo con sus coordenadas geográficas.

Los meridianos son líneas imaginarias que dividen la Tierra de norte a sur y sirven para determinar la hora. Están divididos en 24 partes, cada una separada entre sí 15°.

La Tierra gira de oriente a occidente, por eso se observa que el Sol sale siempre por el Oriente y se oculta por el Occidente. Si se viaja hacia el Oriente, aumentan las horas, mientras que si se hace hacia el Occidente, las horas disminuyen.



Se toma como meridiano cero el **meridiano de Greenwich** que se llama así porque pasa por la localidad de Greenwich Inglaterra, al sur de río Támesis. Las longitudes se miden desde este punto hasta llegar a 180° hacia el oriente y el occidente, hasta completar toda la cobertura del globo terráqueo.

Cada 15° de diferencia, hay un cambio de una hora, aunque si la diferencia no es exactamente de 15° se aproxima al valor más cercano de los múltiplos de 15 para determinar la diferencia horaria entre dos ciudades.



Cada lugar o ciudad en la Tierra tiene una coordenada de latitud que se expresa en grados, minutos y segundos. Al hallar la diferencia en grados entre dos ciudades, se puede encontrar la diferencia horaria que existe entre las dos.

Por ejemplo, la longitud de Bogotá es 74°4′33″ al occidente, mientras la de Río de Janeiro es de 43°13′50″ al occidente. Para conocer la diferencia horaria entre las dos ciudades, se convierte la longitud a grados dividiendo los minutos entre 60 y los segundos entre 3.600. Luego, se suman los valores a los grados así:

Bogotá $74° + \frac{4°}{60} + \frac{33°}{3.600} = 74{,}075°$

Río de Janeiro $43° + \frac{13°}{60} + \frac{50°}{3.600} = 43{,}230°$

Ahora, se encuentra la diferencia en grados que hay entre las dos ciudades. $74{,}075° - 43{,}230° = 30{,}845°$.

Como el valor es cercano a 30, se aproxima. Luego, se divide entre 15, así: $\frac{30}{15} = 2$ horas de diferencia.

Como Río de Janeiro se encuentra al oriente respecto de Bogotá, entonces se aumenta la diferencia horaria en dos horas, es decir, si en Bogotá son las 7 a. m., en Río de Janeiro son las 9 a. m.

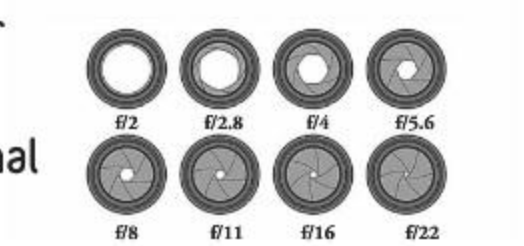
1. **¿Los resultados obtenidos de pasar las coordenadas de minutos y segundos a grados se pueden considerar como números racionales? Explica tu respuesta.**

2. **En la siguiente tabla se muestra la longitud de las principales ciudades del mundo.**

Ciudad	Madrid	Tokio	Sídney
Longitud	3°41′31″	139°42′54″	151°12′40″
Dirección	Occidente	Oriente	Oriente

Encuentra la diferencia horaria de estas ciudades con respecto a Bogotá.

...También me sirve para conocer el funcionamiento de un lente de cámara fotográfica profesional tradicional.



Diafragma de una cámara fotográfica según su apertura



Pupila contraida **Pupila dilatada**

Pupila del ojo humano según la luz que incide en ella

Una parte importante en una cámara fotográfica es el lente, que es el encargado de transmitir y enfocar la cantidad de luz a la película y así generar la reproducción de la imagen. En una cámara convencional esta función se hace de forma automática pero, en las cámaras profesionales, tradicionales, es necesario realizar los ajustes de acuerdo con la distancia e intensidad de luz que haya en el ambiente.

Las partes del lente permiten tomar una fotografía con gran calidad, las más relevantes son:



Objetivo: es el lente por donde ingresa la luz hacia la cámara.

Diafragma: está compuesto de unas hojas metálicas que se abren y cierran permitiendo el ingreso de luz en un determinado tiempo. Cuando las láminas están totalmente abiertas, reciben la máxima de intensidad de luz que es 1 y, en otras posiciones, recibe cada vez la mitad, es decir $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ... hasta llegar a un mínimo de luz que es $\frac{1}{4.096}$.

También existe una relación entre la distancia focal y el diámetro del diafragma que denomina el número F, el cual que indica la medida o luminosidad del objetivo.

$$F = \frac{\text{distancia focal}}{\text{diámetro}}$$

Los valores que puede tomar el número F son 1; $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; $4\sqrt{2}$; 8;... que corresponden a valores aproximados como 1; 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8;... entre otros que están demarcados en el diafragma de la cámara, como se observa en la figura.

En la siguiente tabla se muestra el número F para una cámara con una distancia focal 2.

Entrada de luz	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Diámetro de diafragma	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
Número F	1	1,4	2	2,8	4

Por ejemplo, una entrada de luz de $\frac{1}{16}$ indica que el obturador de la cámara dura la dieciseisava parte de segundo expuesta a la luz haciendo que la intensidad de luz que llega al objetivo sea menor. Entonces, en el diafragma para esta velocidad se gradúa en la opción donde aparece el número 4.

El número F puede cambiar de un lente a otro. Los datos mostrados anteriormente son válidos para un lente de distancia focal 2, pero pueden cambiar dependiendo de este parámetro.

1. **Escribe una lista de números racionales, irracionales y enteros que hayas encontrado en el texto. Luego, explica por qué pertenecen a cada conjunto.**
2. **Encuentra el número F para los valores del diámetro del diafragma mostrados en la tabla pero para una distancia focal de 1.**
3. **Encuentra los números racionales que representan la entrada de luz al diafragma hasta su valor máximo de $\frac{1}{4.096}$.**
4. **Consulta sobre otros valores numéricos que permitan al lente capturar una foto con gran nitidez. Luego explícalo a tus compañeros.**

Trabaja con GeoGebra

Objetivo: construir números irracionales positivos.

Descripción: representar, utilizando el programa GeoGebra, la media geométrica entre los números 2 y 3, la cual se relaciona con raíces cuadradas no exactas. La media geométrica entre dos números positivos a y b es el número positivo c que satisface la siguiente condición: $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Es decir, $\sqrt{a \times b} = c$.

Para acceder a Geogebra, ingresa y descarga el programa en: www.geogebra.org/cms/es

1. En el menú inicio haz clic en **GeoGebra.**
2. Activa la opción **Segmento dados Punto Extremo y Longitud**, en el menú de herramienta, como se muestra en la figura.



3. Haz clic en la zona de trabajo. Luego, observa la ventana que se despliega, digita la longitud del segmento $\overline{AB}$ que, en este caso, es de 3 unidades. Por último haz clic en OK.



4. Activa **Recta que pasa por Dos Puntos** en la barra de herramientas. Luego, traza la recta que pasa por los puntos A y B.



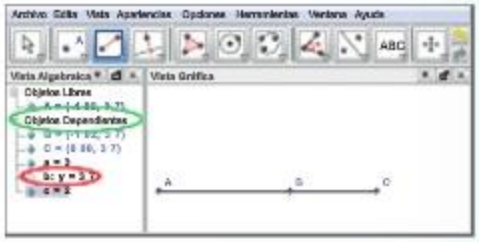
5. Haz clic sobre el punto B y traza otro segmento $\overline{BC}$ de longitud 2 unidades usando la opción **Segmento dados Punto Extremo y Longitud.**



6. Selecciona Vista en el menú. Luego, haz clic en **Vista Algebraica**, como se muestra en la figura.



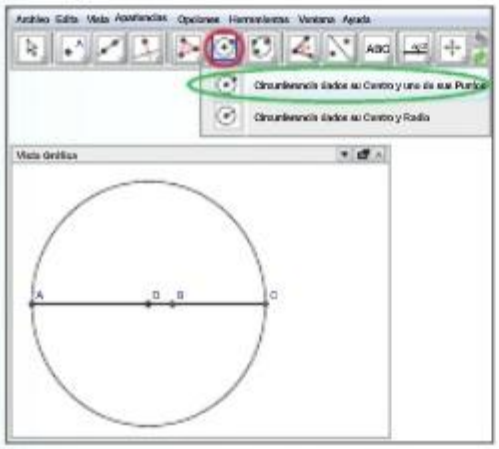
7. Observa en la parte izquierda la lista de **Objetos Dependientes.** Luego, haz clic en el óvalo que se refiere a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ para ocultarla.



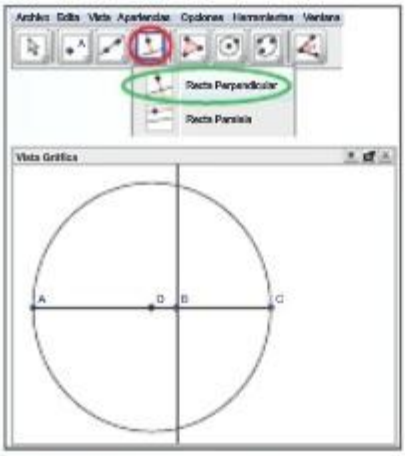
8. Ubica el punto medio D del segmento $\overline{AC}$, con la herramienta **Punto Medio o Centro.**



9. Selecciona **Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos**, en el menú. Luego, haz clic sobre el punto *D*, el cual será el centro de la circunferencia, después haz clic sobre alguno de los puntos *A* o *C*.



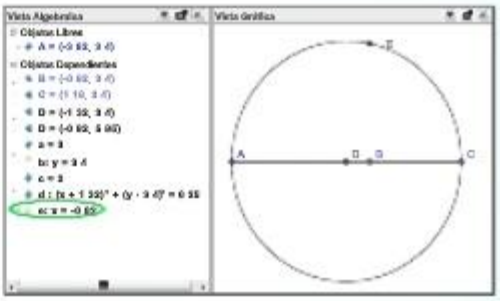
10. Selecciona **Recta Perpendicular,** en el menú. Luego, haz clic primero sobre el segmento $\overline{BC}$ y luego, sobre el punto *B*.



11. Selecciona **Intersección entre Dos Objetos.** Luego, haz clic sobre la intersección entre la recta perpendicular que pasa por *B* y la circunferencia, automáticamente el programa asigna la letra *E* a este punto de intersección.



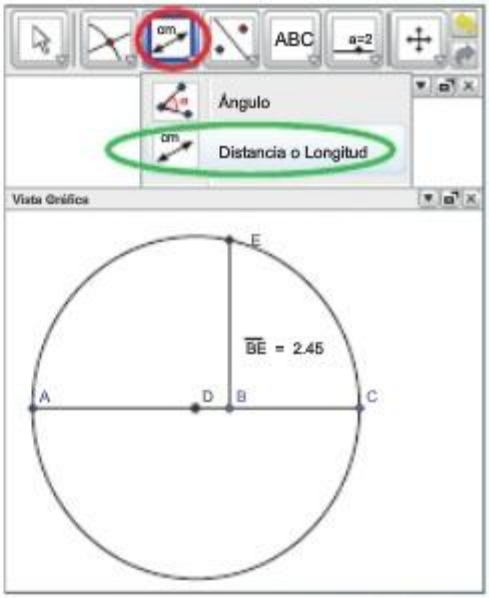
12. En la **Vista Algebraica** ubica la lista de **Objetos Dependientes** y haz clic en el óvalo que se refiere a la recta $\overleftrightarrow{EB}$ para ocultarla.



13. Selecciona **Segmento entre dos puntos** del menú. Luego, haz clic en los puntos *B* y *E*, como se muestra en la figura.



14. Selecciona la opción **Distancia o Longitud**, en el menú. Luego, calcula la medida del segmento $\overline{EB}$, la cual corresponde a la media geométrica entre 3 y 2 y representa al número irracional $\sqrt{6} \approx 2{,}45$.





2 Expresiones algebraicas

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Conocer qué es un **término algebraico** y cuáles son sus elementos.
- **Clasificar polinomios** según su número de términos.
- Representar mediante una expresión algebraica un enunciado.
- Calcular el **valor numérico** de un polinomio.

Encuentra en tu Libromedia

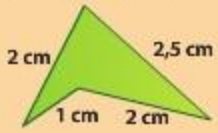
Evaluaciones:

- ✓ De desempeño

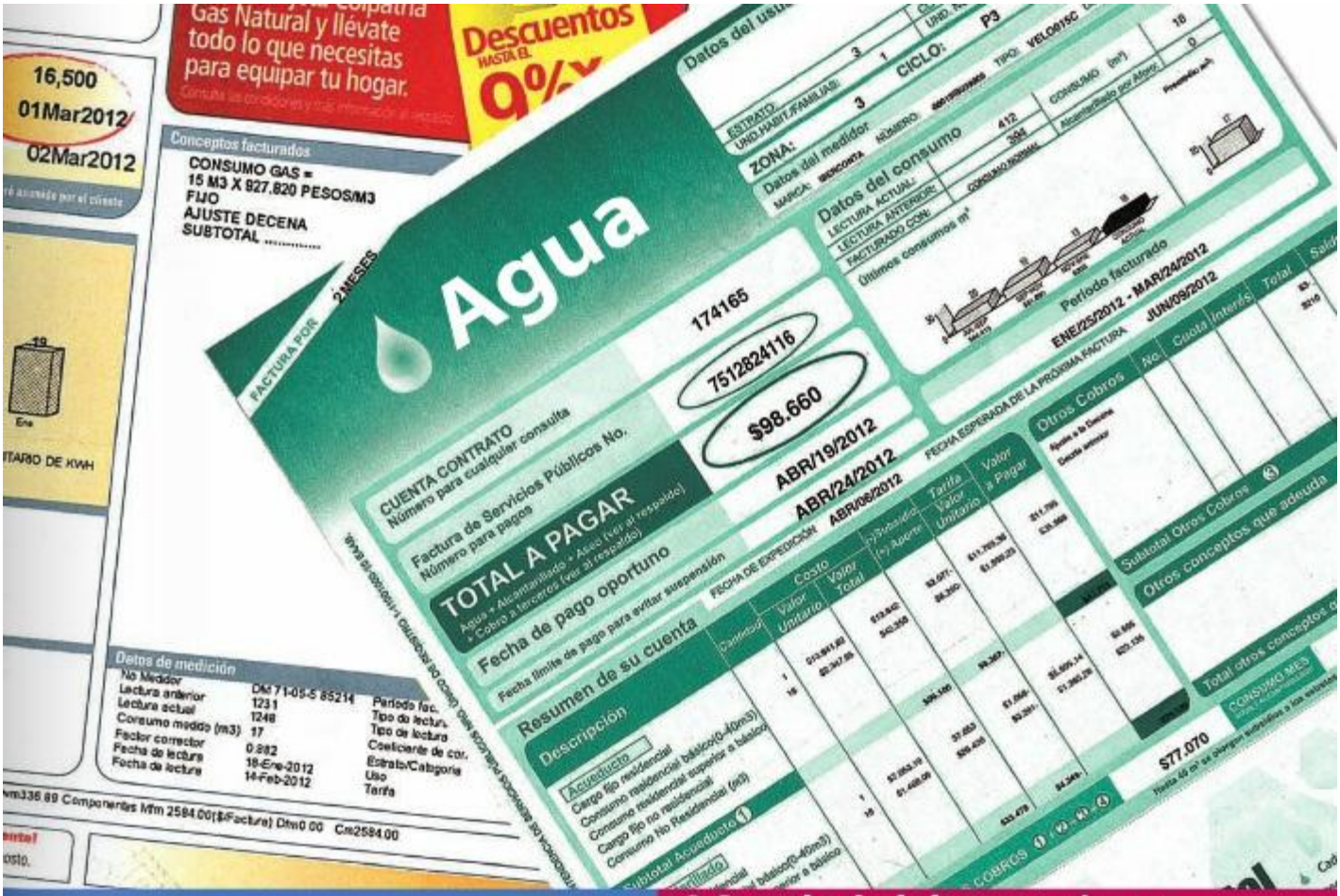
2	Multimedia	1	Audio
1	Galería	7	Imprimibles
4	Actividades	1	Enlace web

Lo que sabes...

1. Expresa las siguientes multiplicaciones como potencias. Luego, indica cuál es la base y cuál es el exponente.
   a. $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
   b. $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$
   c. $m \times m \times m \times m \times m \times m \times m$
2. Resuelve los siguientes polinomios aritméticos.
   a. $(2)^3 \div 4 + (15)^2 \div (-5)$
   b. $\{[(7)^2 - 7] \div (-6)\} + 30$
3. Calcula el perímetro de las siguientes figuras.







Cronología de las expresiones algebraicas

Grecia. Diofanto de Alejandría aplica el lenguaje algebraico en las resolución de problemas.

Bagdad. Al-Juarismi en su libro titulado en español, *Compendio de cálculo por compleción y comparación* expone los cimientos del álgebra.

Italia. Luca Pacioli utiliza expresiones algebraicas como "*frounam. I. nº. che gioto al suo drat° facia*" que actualmente equivale a $x + x^2 = 12$.

Europa. Se aplica el lenguaje algebraico en la descripción de fenómenos naturales.

Países Bajos. Descartes emplea expresiones como *cy* o *4y* para indicar ciertos términos algebraicos.

Irlanda. El astrónomo William Hamilton desarrolla expresiones para representar números complejos y cuaterniones en forma algebraica.

250 a. C. | 800 d. C. | 1400 d. C. | 1494 d. C. | 1637 d. C. | 1843 d. C.



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para calcular el costo de las facturas de los servicios públicos.

Los servicios públicos como la luz, el agua, el gas o el teléfono son necesarios, y es obligación del Gobierno garantizar la mayor cobertura posible de estos servicios. Sin embargo, esta cobertura requiere de un costo que depende del consumo, el estrato socioeconómico, los subsidios existentes y el tipo de residencia que recibe un determinado servicio.

Lee más acerca de este tema en la página 50.

1. Lenguaje algebraico

Ampliación multimedia

El **álgebra** permite representar simbólicamente los enunciados de algunos problemas para resolverlos. De acuerdo con esto, mediante expresiones algebraicas se pueden resolver problemas, en áreas de la economía, la ingeniería, la física, entre otras. Por ejemplo, en física se pueden resolver problemas de caída libre mediante la expresión algebraica $\frac{gt^2}{2}$.

En una expresión algebraica se indican números conocidos y desconocidos. A los números conocidos se les denomina **constantes** y a los números desconocidos, cuyo valor puede variar, se les denomina **variables**. Por ejemplo, el enunciado "el doble del cuadrado de un número aumentado en 5" se representa con la expresión algebraica $2x^2 + 5$, en la que 2 y 5 son constantes y x es la variable.

Historia de las matemáticas

El álgebra

La palabra álgebra tiene su origen en el término al-jabr que aparece por primera vez en la obra de Al-Juarismi (825): *Kitab al jabr i al muqabala.*



Al parecer los términos *al-jabr y muqabala* significan "restauración" y "compensación", respectivamente.

Recurso imprimible

1.1 Términos algebraicos

Los **términos algebraicos** son expresiones algebraicas que no involucran sumas y restas entre las variables y las constantes, pero sí multiplicaciones. Por ejemplo, las expresiones $-5x^2y$ y $12ab^3$ son términos algebraicos.

Un término algebraico tiene los siguientes elementos:

Signo: es el símbolo que indica si el término es positivo o negativo. Por ejemplo, el término $-3xy$ es negativo porque está precedido por el símbolo $-$. En cambio, los términos $7m$ y $+ 3ab$ son positivos. En este caso, el término puede ir precedido por el símbolo $+$ o sin este símbolo.

Coeficiente: es el número real que aparece en cada término. Por ejemplo, en el término $\sqrt{2}\,xy$ el coeficiente es $\sqrt{2}$.

Exponente: es el número que indica la cantidad de veces que se multiplica una variable. Por ejemplo, en el término $5a^3$ el exponente es 3 e indica que a se multiplica tres veces por sí misma, es decir, $a^3 = a \times a \times a$.

Parte literal: es el producto de las variables de un término con sus respectivos exponentes. Por ejemplo, en el término $2xy^2$, la parte literal es xy^2.

EJEMPLOS

1. Representar algebraicamente cada enunciado.

a. Un tercio del cubo de un número aumentado en uno

Si x representa el número desconocido, entonces, la expresión algebraica que representa el enunciado es:

$$\frac{1}{3}x^3 + 1$$

b. La suma de los cuadrados de dos números.

Si a y b representan los números desconocidos, entonces, la expresión algebraica que representa el enunciado es:

$$a^2 + b^2$$

c. La diferencia entre un número y su cuadrado.

Si m representa el número desconocido, entonces la expresión algebraica correspondiente es $m - m^2$.

2. Determinar el signo, el coeficiente, los exponentes y la parte literal de cada término.

a. $-7x^2m^4$

Signo: negativo $(-)$

Coeficiente: -7

Exponentes: 2 y 4

Parte literal: x^2m^4

b. $\sqrt{3}\,m^3y^2$

Signo: positivo

Coeficiente: $\sqrt{3}$

Exponentes: 3 y 2

Parte literal: m^3y^2

2. Monomios

Recursos imprimibles

Un **monomio** es una expresión algebraica que consta de un solo término, en el que el coeficiente es un número real, y los exponentes son números enteros mayores o iguales a cero.

Los elementos de un monomio son signo, coeficiente, exponentes y parte literal.

2.1 Características de un monomio

Enlace web

En un monomio se puede determinar el grado absoluto, el grado relativo con respecto a una variable y el valor numérico.

Matemáticamente

¿Puede el grado absoluto de un monomio ser igual al grado relativo con respecto a una de sus variables?

Grado absoluto de un monomio

El **grado absoluto** de un monomio es la suma de los exponentes de las variables. Según el grado absoluto los monomios se clasifican en:

- **Homogéneos:** si dos o más monomios tienen el mismo grado absoluto.
- **Heterogéneos:** si dos o más monomios tienen diferente grado absoluto.

Grado relativo de un monomio con respecto a una variable

El grado relativo de un monomio con respecto a una variable es el exponente de la variable.

Por ejemplo, en el monomio $-10ab^2$, el grado relativo con respecto a b es 2.

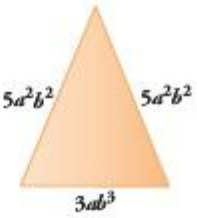
Valor numérico de un monomio

El valor numérico de un monomio es el valor que se obtiene al remplazar las variables por números y efectuar las operaciones.

Por ejemplo, si $m = -5$, entonces, el valor numérico del monomio $8m$ es:
$8 \times (-5) = -40$.

EJEMPLOS

1. Establecer si los monomios que representan las medidas del triángulo son homogéneos o heterogéneos.



Primero, se halla el grado absoluto de cada monomio. Para esto, se suman los exponentes de las variables. Así el grado absoluto de $5a^2b^2$ es 4 y el de $3ab^3$ es 4.

Luego, se comparan los grados absolutos en ambos monomios, que en este caso son iguales.

Finalmente, se tiene que los monomios son homogéneos.

2. Determinar el grado relativo del monomio $-\frac{1}{7}x^4y^5$ con respecto a cada una de sus variables.

El grado relativo del monomio corresponde al exponente de cada una de sus variables. Así, el grado relativo con respecto a x es 4 y con respecto a y es 5.

3. Calcular el valor numérico del siguiente monomio.

$-\frac{1}{2}mn^3$, **si** $m = -4$ **y** $n = 3$.

Se realizan los siguientes pasos:

$-\frac{1}{2}(-4)(3)^3$ Se remplazan m y n.

$= -\frac{1}{2}(-4)(27)$ Se resuelve la potencia.

$= 54$ Se simplifica.

Por tanto, el valor numérico de $-\frac{1}{2}mn^3$ cuando $m = -4$ y $n = 3$ es 54.

4. Resolver cada problema.

a. Calcular el área de un círculo cuyo diámetro es 18 cm.

Primero, se tiene que el radio mide 9 cm porque corresponde a la mitad del diámetro.

Luego, se calcula el área A del círculo, así:

$A = \pi r^2$ Expresión para calcular el área del círculo.

$= \pi(9)^2$ Se remplaza la medida del radio.

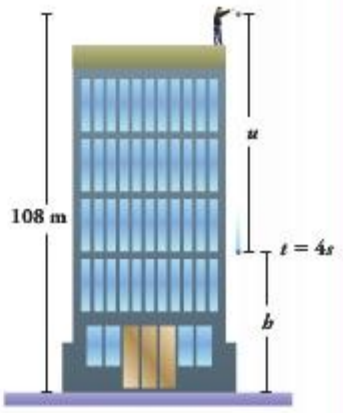
$= 81\pi$ Se resuelve la potencia.

$= 254{,}47$ Se aproxima.

Finalmente, se tiene que el área del círculo es aproximadamente 254,47 cm².

> **Recuerda que...**
> El valor de π equivale a es 3,1415926... aunque, para simplificar los cálculos se utiliza la aproximación $\pi = 3{,}1416$.

b. Julián deja caer un balón desde la terraza de un edificio a 108 m de altura, como se muestra en la figura. Sin considerar la fricción con el aire, ¿a qué altura con respecto al suelo se encontrará el balón después de 4 segundos?



En este caso se aplica la expresión $h = \frac{gt^2}{2}$, donde $g = 9{,}8$ m/s² es la aceleración de la gravedad y t es el tiempo.

Luego, para calcular la altura de H con respecto al suelo después de 4 segundos se realizan los siguientes pasos:

$H = 108 - \frac{gt^2}{2}$ Se plantea la expresión algebraica.

$= 108 - \frac{9{,}8(4)^2}{2}$ Se remplazan la aceleración de la gravedad y el tiempo.

$= 108 - \frac{9{,}8(16)}{2}$ Se resuelve la potencia.

$= 108 - (9{,}8)(8)$ Se divide.

$= 108 - 78{,}4$ Se multiplica.

$= 29{,}6$ Se resta.

Por tanto, el balón estará a 29,6 metros de altura con respecto al suelo después de 4 segundos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Modelo · Razono · Soluciono problemas

Responde.

1. ¿Cuál es el grado absoluto del monomio $-5xy^2z^3$?
2. ¿Cuál es el coeficiente del monomio $170mx^2y$?
3. Si un monomio tiene 7 variables, cada una al cuadrado, ¿cuál es el grado relativo con respecto a cualquiera de sus variables?
4. Si el valor numérico de un monomio es 64, su coeficiente es 8 y su única variable está elevada al cubo, ¿cuál es el valor de la variable?

Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

5. Dos monomios son homogéneos cuando tienen el mismo coeficiente.
6. El grado absoluto del monomio $-7ab^2c^3$ es menor que 4.
7. El coeficiente del monomio $-\frac{1}{5}xy$ es racional.
8. Dos monomios son heterogéneos siempre que su parte literal sea diferente.

9. Completa la siguiente tabla.

Monomio	Signo	Coeficiente	Parte literal	Grado absoluto
$7x^5y^2$				
	−	4	m, n	3
$\frac{1}{3}p^2q^2r$				
	+	$\sqrt{3}$	u, v	5

Escribe dos monomios que cumplan cada condición:

10. Coeficiente racional negativo, grado absoluto 5 y grado relativo con respecto a una variable 3.
11. Coeficiente irracional positivo, parte literal con 6 variables y grado absoluto divisible entre 7.
12. Coeficiente racional positivo, parte literal con 3 variables y grado absoluto divisible entre 4.
13. Coeficiente irracional negativo, parte literal con 4 variables y grado absoluto divisible entre 5.
14. Coeficiente 1, grado absoluto 2 y grado relativo con respecto a una variable 2.

Escribe la expresión algebraica que corresponde a cada enunciado.

15. La raíz cuadrada del triple de un número.
16. La cuarta parte del cuadrado de un número.
17. La mitad de la diferencia entre dos números distintos.
18. La raíz cúbica de la suma de los cuadrados de dos números.

Completa los exponentes de cada monomio, teniendo en cuenta su grado absoluto.

19. $-5x^{\square}y^2$ — Grado absoluto: 5
20. $\frac{1}{3}my^2z^{\square}$ — Grado absoluto: 11
21. $\sqrt{7}\,a^2b^{\square}c^9$ — Grado absoluto: 23

Calcula el valor numérico de cada monomio.

22. $5a^2b^3$ si $a = -2$ y $b = 1$
23. $-4cd^4$ si $c = -3$ y $d = 2$
24. $\frac{3}{4}m^2n^3p$ si $m = 2$, $n = -2$ y $p = -\frac{1}{6}$

Escribe el monomio que representa el perímetro de cada polígono regular. Luego, calcula su valor numérico con las cantidades dadas.

25.

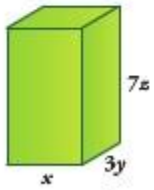


26.



Resuelve.

27. Expresa el volumen del paralelepípedo con un monomio. Luego, halla su valor cuando $x = 2$, $y = 1$ y $z = 3$.



28. Un objeto se deja caer de un puente a una altura de 40 m. ¿Llegará al suelo antes o después de 3 segundos? (Aplica la expresión $h = \frac{gt^2}{2}$, donde $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.)

3. Polinomios

Ampliación multimedia Recurso imprimible

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por sumas o restas de dos o más monomios. Los monomios que conforman el polinomio se denominan términos del polinomio.

En particular, a un polinomio conformado por dos monomios se le denomina **binomio** y a un polinomio que consta de tres términos se le denomina **trinomio**.

EJEMPLOS

1. Determinar si cada polinomio es binomio o trinomio. Luego, identificar sus términos.

a. $mn^2 + 3m^2n$

El polinomio es un binomio porque tiene dos términos que son mn^2 y $3m^2n$.

b. $7ab^2 - 7b + 4$

El polinomio es un trinomio porque consta de tres términos: $7ab^2$, $-7b$ y 4.

Matemáticamente

Representa con un polinomio el enunciado: "la décima parte del cuadrado de un número disminuido en el cubo del mismo número".

2. Escribir el polinomio que representa el siguiente enunciado. "El doble de un número más su cuadrado menos la tercera parte de su cubo".

Si y es el número desconocido, entonces para representar el enunciado se realizan los siguientes pasos:

$2y$ Se representa el doble del número.

$2y + y^2$ Se suma el cuadrado del número.

$2y + y^2 - \frac{1}{3}y^3$ Se resta la tercera parte del cubo del número.

Por tanto, el enunciado se representa con el polinomio $2y + y^2 - \frac{1}{3}y^3$.

3. En un avión se presenta la siguiente situación: el número de pasajeros de "clase turista" es la mitad del cubo de la cantidad de pasajeros de "primera clase".

Si aparte de los pasajeros está el piloto, el copiloto y dos azafatas, expresa con un polinomio la cantidad total de personas que hay en el avión.



Primero, se representa con x la cantidad de pasajeros de primera clase.

Luego, se halla el monomio que representa la cantidad de pasajeros que hay en clase turista.

Cantidad de pasajeros en clase turista: $\frac{1}{2}x^3$.

Finalmente, como aparte de los pasajeros hay 4 personas más, el polinomio que representa la cantidad total de ocupantes es: $x + \frac{1}{2}x^3 + 4$.

3.1 Características de un polinomio

Recurso imprimible Actividad

En un polinomio también es posible determinar el grado absoluto y el grado relativo con respecto a una variable. Además, se puede determinar cuándo los términos de un polinomio son semejantes, qué es el término independiente de un polinomio, qué son un polinomio ordenado, un polinomio completo y un polinomio opuesto.

Grado absoluto de un polinomio

El grado absoluto de un polinomio es el mayor grado absoluto de los términos del polinomio. Por ejemplo, en el binomio $a^2b - ab$ grado absoluto de a^2b es 3 y el de ab es 2, por esto el grado absoluto del polinomio es 3.

Grado relativo de un polinomio con respecto a una variable

Actividad

El grado relativo de un polinomio con respecto a una variable, es el mayor exponente que tiene la variable en el polinomio.

Por ejemplo, en el polinomio $2x^2y + 3xy^3$ el grado relativo con respecto a y es 3.

Términos semejantes de un polinomio

Dos o más términos de un polinomio son semejantes cuando su parte literal es la misma, es decir, cuando las variables de ambos términos con sus respectivos exponentes, son exactamente iguales. Por ejemplo, los términos $-5x^2yz^3$ y $7yx^2z^3$ son semejantes porque sus variables con sus respectivos exponentes son los mismos.

> **Recuerda que...**
> Dos términos como c^2a^2b y $-2a^2bc^2$ son semejantes sin importar el orden en el que aparezcan las variables como factores.

EJEMPLOS

1. Encontrar el grado absoluto del siguiente polinomio.

$$\frac{1}{3}x^2y^2 - \frac{2}{5}x^3y^2 + 7x^4y^3$$

Primero, se calcula el grado absoluto de cada término.

$\frac{1}{3}x^2y^2$ tiene grado absoluto 4.

$-\frac{2}{5}x^3y^2$ tiene grado absoluto 5.

$7x^4y^3$ tiene grado absoluto 7.

Luego, se cumple que $7 > 5 > 4$.

Finalmente, el grado absoluto del polinomio es 7.

2. Identificar los términos semejantes en cada caso.

a. $4a^3b^2 - 3a^2b^3 - ab^2 + 2a^3b^2 - ab$

Los términos semejantes que hay en el polinomio son $4a^3b^2$ y $2a^3b^2$, porque son los únicos términos que tienen exactamente las mismas variables con sus respectivos exponentes.

b. $4x^n + 3y^n + 5z^n - 13x^n + 7z^{n+1} + 4$

Los términos semejantes que hay en el polinomio son $4x^n$ y $-13x^n$, ya que son los que tienen exactamente las mismas variables con sus respectivos exponentes.

3. Hallar el valor de a en el polinomio $5x^{a-2} - 3x^3y^2$, teniendo en cuenta que el grado relativo con respecto a x es 9.

Como el grado relativo con respecto a x es el mayor exponente de esta variable en el polinomio, entonces, $a - 2 = 9$.

Por tanto, el valor de a es 11.

4. Determinar el valor de m en el polinomio $2x^m - x^8y^{m+1} + y^{m+7}$, si su grado absoluto es 17.

Primero, se determina el grado absoluto de cada término.
$2x^m$ tiene grado absoluto m.

$-x^8y^{m+1}$ tiene grado absoluto $8 + m + 1$

y^{m+7} tiene grado absoluto $m + 7$

Luego, se cumple que $8 + m + 1 > m + 7 > m$, con lo cual:

$$8 + m + 1 = 17$$

Finalmente, como $m + 9 = 17$, entonces el valor de m es 8.

Por tanto, si se remplaza el exponente m en el polinomio, este se expresa como:

$$2x^8 - x^8y^9 + y^{15}$$

Matemática*mente*

¿Cuál es el término independiente en el polinomio $5x^2 + 2x$?

Término independiente de un polinomio

El **término independiente de un polinomio** es el término de grado cero en el polinomio, es decir, la constante. Por ejemplo, en el polinomio $7y^4 + 5y^3 + 12$, el término independiente es 12 porque su grado es cero, es decir, $12\,y^0 = 12$.

Polinomio ordenado



Un polinomio se puede ordenar con respecto a los exponentes de una de sus variables. Así, si los exponentes de la variable aparecen de *menor a mayor*, el polinomio está ordenado en forma **ascendente**. En cambio, si los exponentes de la variable aparecen de *mayor a menor* el polinomio está ordenado en forma **descendente**. Por ejemplo, el trinomio $x^4y^3 - 2x^3y^5 + 7x^2y$ está ordenado en forma descendente con respecto a x.

Polinomio completo

Un polinomio es **completo** si, al ordenarlo con respecto a una variable, aparecen los exponentes consecutivos entre 0 y el mayor exponente de la variable. Por ejemplo, para determinar si el polinomio $3a^2b^3 - a^3 + 8b^2$ es completo, se ordenan sus términos con respecto a la variable a, es decir, $-a^3 + 3a^2b^3 + 8b^2$. Como no aparece ningún término en el que la variable a tenga exponente 1, entonces el polinomio no es completo.

Polinomio opuesto

El **opuesto** de un polinomio se obtiene al cambiar los signos de los coeficientes de cada uno de sus términos. Por ejemplo, el opuesto del binomio $-3ax^2y + 5ax$ es $3ax^2y - 5ax$.

EJEMPLOS

1. Determinar el término independiente en el siguiente polinomio.

$$3x^2 - 2=x + = - 5=x^3 + 4$$

Primero, se establecen las constantes del polinomio.

Luego, se tiene que las constantes son = y 4.

Finalmente el término independiente es = + 4, cuyo valor se aproxima a 7,1416.

2. Hallar el polinomio opuesto de $-7ax^2 + 8a^2x + 12$.

Para obtener el polinomio opuesto se cambian los signos de cada término. Por tanto, el polinomio opuesto es:

$$7ax^2 - 8a^2x - 12$$

3. Hallar el valor de ab, si el siguiente polinomio es ordenado y completo.

$$5x^{a+3} + 7x^4 - 3x^{b-2} + 8x^2 - x + \sqrt{2}$$

Primero, se tiene que el polinomio está ordenado en forma descendente porque los exponentes de la variable aparecen de mayor a menor.

Luego, como el polinomio es completo deben aparecer los exponentes de x desde el mayor hasta 0. Por esto se tiene que:

$a + 3 = 5$ $\qquad$ $b - 2 = 3$

$a = 2$ $\qquad$ $b = 5$

Finalmente, se tiene que el producto ab es igual a 10.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Modelo · Soluciono problemas

Completa.

29. En el polinomio:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ donde a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_1$ y a_0 son constantes, el término independiente es _____.

30. El opuesto del polinomio $\frac{1}{2}x - 3$ es _____.

31. El polinomio $7y^4 - 5y^3 + y - 2$ se encuentra _____ pero no es completo.

32. En el polinomio:

$a^2x^3 - 7a^3x^2 + 2x^3a^2 - 7a^2x^2 + 4$ los términos semejantes son _____ y _____.

Determina cuáles de los siguientes polinomios son completos con respecto a la variable x. Justifica tu respuesta.

33. $x^2 - 7x$

34. $12ax^2 - 3x^3 + 8a^4x + 5$

35. $-\frac{1}{3}mx^4 - 7xm + x^3 + m^2x^2 - 1$

36. $x^6 - 10bx^3 + x^4b^3 + b^5 + x^2b^2 - x + 2$

37. Completa la tabla.

Polinomio	Grado absoluto	Término independiente
$3m^2n^3 - 5m^3n + 5$		
$4p^5 - 5p^4 - 2p^3 - 1$		
$-2q^6r - 3q^7r^2 - q^8$		
$3x^2 + 5y^5 - 6x^3y^4$		

Escribe un polinomio que cumpla cada condición. Luego, determina su opuesto.

38. Trinomio con dos variables y grado absoluto 3.

39. Polinomio ordenado y completo con solo una variable y grado absoluto 4.

40. Polinomio de 7 términos con coeficientes irracionales, ordenado y completo con respecto a una de sus variables.

41. Polinomio ordenado y completo con respecto a dos variables, con grado relativo 3 para cada variable.

Halla el valor de a para que cada polinomio sea ordenado y completo.

42. $4x^{a+2} + 6x^{2a} - x^a + 2$

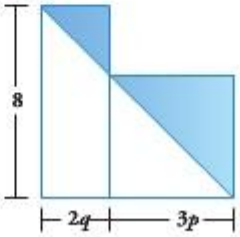
43. $-3 + 5y^{4-a} + 3y^2 - y^a + 8y^{2a-2}$

44. $m^{a-5} - 2m^{8-a} + 7$

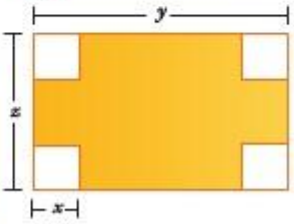
45. $a + 3n^{2a-4} - 2n^2 + n^{2a-2}$

Escribe un polinomio que indique las operaciones para el cálculo del área sombreada de cada figura.

46.



47.



Resuelve.

48. Escribe un polinomio completo de grado 6 y determina su opuesto.

49. Si el grado relativo con respecto a x en el polinomio $4x^{2n+3} - 5x^{2n} + 2{,}8x^{2n-1}$ es 15, ¿cuál es el valor de n^2?

50. ¿Cuál es el valor del término independiente del polinomio $(a + 2)x^{a+3} - ax + (3a + 2)$?

La siguiente tabla muestra los precios de tres tipos de automóviles en un concesionario.

Tipo de automóvil	Precio en millones
A	21
B	35
C	50



Si en un mes se vendieron x automóviles tipo A, y automóviles tipo B y z automóviles tipo C, responde:

51. ¿Cuál es el polinomio que representa las ventas de los tres tipos de autos en el mes?

52. Si $y = \frac{x^2}{2}$ y $z = \frac{1}{4}$, ¿cuál es el término independiente en el polinomio resultante $y + z$?

Valor numérico de un polinomio

Recurso imprimible · Actividad

El **valor numérico** de un polinomio es el resultado que se obtiene al remplazar las variables por números y efectuar las operaciones indicadas.

Por ejemplo, en el polinomio $5z^3 - 4z + 2$ si $z = -1$, entonces, se tiene que $5(-1)^3 - 4(-1) + 2 = 1$. Por tanto, el valor numérico del polinomio cuando $z = -1$ es 1.

EJEMPLOS

1. Calcular el valor numérico de cada polinomio si $a = 3$, $b = -2$ y $c = 4$.

a. $5ab^2 - 2a^3c + abc^2 - 30$

Se realizan los siguientes pasos:

$5(3)(-2)^2 - 2(3)^3(4) + (3)(-2)(4)^2 - 30$ Se remplaza cada variable.

$= 5(3)(4) - 2(27)(4) + (3)(-2)(16) - 30$ Se resuelven las potencias.

$= 60 - 216 - 96 - 30$ Se multiplica.

$= -282$ Se simplifica.

Por tanto, el valor numérico del polinomio cuando $a = 3$, $b = -2$ y $c = 4$ es -282.

b. $9a + 4a^2b + \frac{1}{3}c$

Se realizan los siguientes pasos:

$9(3) + 4(3)^2(-2) + \frac{1}{3}(4)$ Se remplaza cada variable.

$= 9(3) + 4(9)(-2) + \frac{1}{3}(4)$ Se resuelve la potencia.

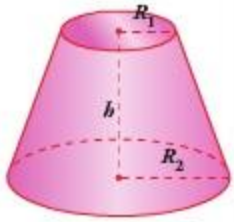
$= 27 - 72 + \frac{4}{3}$ Se multiplica.

$= -\frac{131}{3}$ Se simplifica.

Por tanto, el valor numérico del polinomio con los valores es $-\frac{131}{3}$.

2. El volumen de un tronco de cono, como el que se muestra en la figura, está dado por la expresión:

$$\frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$$



Determinar el volumen de un tronco de cono si sus radios miden 20 cm y 12 cm, y la altura es 15 cm.

Primero, se tiene que la altura h es 15 cm y los radios R_1 y R_2 miden 12 cm y 20 cm, respectivamente.

Luego, se realizan los siguientes pasos:

$\frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$ Expresión para el volumen de un tronco de cono.

$= \frac{\pi(15)}{3}((12)^2 + (12)(20) + (20)^2)$ Se remplazan las medidas de la altura h y de los radios R_1 y R_2.

$= \frac{\pi(15)}{3}(144 + 240 + 400)$ Se resuelven las potencias y se multiplica.

$= 5\pi(784) = 3.920\pi$ Se realizan operaciones.

Finalmente, el volumen del tronco de cono es aproximadamente 12.315 cm^3.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Propongo · E Ejercito · M Modelo · S Soluciono problemas

Escribe los polinomios que representa cada enunciado utilizando las variables x y y. Luego, calcula algunos posibles valores numéricos.

53. El cubo de un número más el cuadrado de otro número.

54. El producto de dos números más el cuadrado de uno de ellos.

55. La diferencia entre dos números al cuadrado.

56. El triple del cubo de la suma de dos números.

E Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios si $x = -2$, $y = -4$ y $z = 4$.

57. $x - y + z$

58. $3x + z - y$

59. $2xz - 3xy + 4$

60. $x^2 - y^2 - z^2$

61. $5x^2y + 3y^2z - 2xz$

62. $8 - 2xy^2 + 3x^2y - z^2$

63. $\frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{1}{4}xz^2 - 13$

64. $-\frac{2}{3}xy^3z^2 + \frac{1}{9}x^3y^2z$

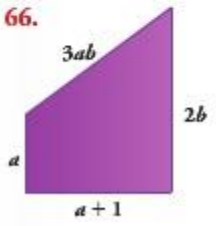
65. Encuentra el error que se cometió al calcular el valor numérico del polinomio

$4m^3n^2 - 2m^2n^3 + 5mn$ **si** $m = -2$ **y** $n = 3$.

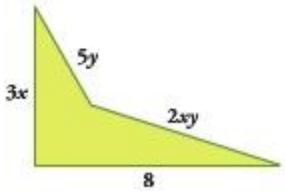
$$4m^3n^2 - 2m^2n^3 + 5mn$$
$$= 4(-2)^3(3)^2 - 2(-2)^2(3)^3 + 5(-2)(3)$$
$$= 4(-8)(9) - 2(4)(27) + 5(-2)(3)$$
$$= -288 - 218 - 30$$
$$= -536$$

Escribe el polinomio que representa el perímetro de cada figura. Luego, propón un valor numérico para cada variable y calcula el perímetro.

66.

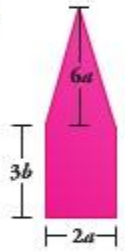


67.

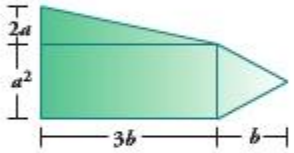


M Representa el área de cada figura mediante un polinomio. Luego, calcula el valor numérico del polinomio si $a = 5$ y $b = 10$.

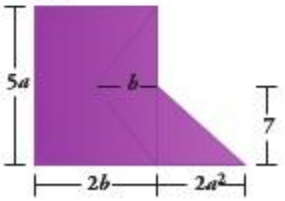
68.



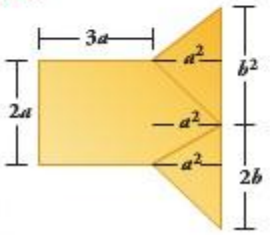
70.



69.



71.



S Resuelve.

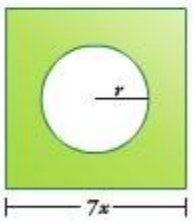
72. Las utilidades de una compañía se representan por medio del polinomio $3x^2 - 50x + 10$, donde $x \geq 20$ es el número de seguros vendidos en un mes. Si las utilidades están dadas en millones de pesos, ¿cuáles son las utilidades de la compañía si se vendieron 50 seguros?

73. El desplazamiento de un móvil en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado está dado por el polinomio:

$$v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Donde v_0 es la velocidad inicial, a es la aceleración y t es el tiempo. Calcula el desplazamiento de un automóvil en 30 segundos, si su velocidad inicial es 20 m/s y su aceleración es 3 m/s².

74. En un terreno cuadrado se quiere construir una fuente circular de radio r como se muestra en la siguiente figura. Representa con un polinomio el área que queda disponible después de construir la fuente. Luego, calcula su valor numérico si $x = 11$ m y $r = 20$ m.



EJERCICIOS PARA REPASAR

Lenguaje algebraico

Escribe la expresión algebraica que representa cada enunciado.

75. El doble de un número aumentado en 10.

_____

76. El triple de un número aumentado en su cuadrado.

_____

77. La tercera parte del cuadrado de un número disminuida en 2.

_____

78. La mitad de la raíz cuadrada de la suma de dos números.

_____

Escribe un enunciado para cada expresión algebraica.

79. $3m^3 + 2n^2$

_____

_____

_____

80. $\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3}p^3$

_____

_____

_____

Determina los elementos de cada término algebraico.

81. $\sqrt{6}xy^2z^3$

Signo: _____

Coeficiente: _____

Parte literal: _____

82. $-\frac{1}{3}a^4bc$

Signo: _____

Coeficiente: _____

Parte literal: _____

83. $3\sqrt{2}p^2qr^3$

Signo: _____

Coeficiente: _____

Parte literal: _____

84. $-\frac{5}{3}\pi m^4n^2o$

Signo: _____

Coeficiente: _____

Parte literal: _____

Monomios

Completa los exponentes para que cada par de monomios sean homogéneos.

85. $7a^{\square}b^2$ y $-3a^5b$

86. $12mn^{\square}$ y $\frac{2}{3}m^3n^7$

87. $-\frac{1}{4}p^2q^7$ y $-13p^{\square}q^3$

88. $\frac{3}{7}x^{\square+2}y^3$ y $-x^4y^8$

Halla el valor de a en cada caso, teniendo en cuenta la condición dada.

89. $5x^ay^4$ con grado absoluto 5.

$a =$ _____

90. $-8x^{a+3}y^2$, el grado relativo con respecto a x es 10.

$a =$ _____

91. $\frac{1}{3}y^{2a-1}$, el grado relativo con respecto a y es 13.

$a =$ _____

92. $21x^{20}y^{a-4}$, el grado absoluto es 35.

$a =$ _____

Calcula el valor numérico de cada monomio si $x = \frac{3}{2}$, $y = -2$ y $z = 3$.

93. $3x^3y^2z$

94. $5xy^3z^2$

95. $\frac{2}{7}x^4y^2z^2$

Polinomios

Escribe un polinomio que cumpla la condición que se indica en cada caso.

96. Binomio con grado absoluto 8.

_____

97. Trinomio con variables x, y y grado relativo con respecto a x igual a 5.

_____

98. Polinomio con grado absoluto 4, ordenado y completo.

_____

99. Polinomio con variables a, b, grado relativo con respecto a a igual a 2 y grado relativo con respecto a b igual a 7.

_____

Calcula el valor numérico de cada polinomio si $m = 5$, $n = -3$ y $r = -1$.

100. $9m - 3n + r$

101. $-3m^2n + 2mr^3 - n^2 + 5$

102. $4m^3 - 2n^2 - 5r^4 - 3$

103. $\frac{2}{5}m^2 - n^2 + 7n^3r$

Responde.

104. ¿Cuál es el valor de a en $3m^{3a+2}n^2 - 5m^6n$, si su grado absoluto es 13?

_____

105. ¿Cuál es el valor de k para que el siguiente polinomio sea completo y ordenado en forma descendente? $-2x^{k+2} + 3x^{2k-1} + 4x^2 - 6x - k$

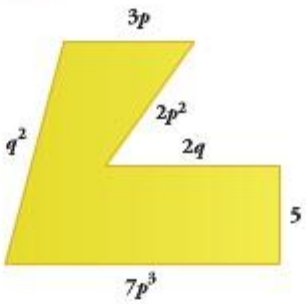
_____

106. ¿Cuál es el polinomio opuesto a $\frac{5}{4}x^3 - \frac{3}{5}x^2y + \frac{1}{3}y^2$?

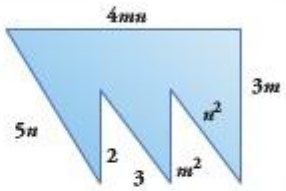
_____

Representa el perímetro de cada figura con un polinomio. Luego, calcula su valor numérico.

107. $p = 2$ y $q = 3$



108. $m = 5$ y $n = 4$



Une con una línea los términos semejantes.

109. $8b^3km^2$	**a.** $\frac{1}{2}mb^3k$
110. $-\frac{1}{3}k^3mb^2$	**b.** $-10k^2m^3b$
111. $7kmb^3$	**c.** mk^3b^2
112. $-9m^3kb^2$	**d.** $2m^2b^3k$
113. m^3k^2b	**e.** $-8km^3b^2$

PROBLEMAS PARA REPASAR

Se desea pintar el exterior de una casa, incluyendo su techo, teniendo en cuenta las dimensiones que se muestran en la figura. La casa solo cuenta con ventanas en la pared frontal y en el costado derecho. Si el área de cada ventana es de 0,6 m² y el área de la puerta es de 2 m²:

¿Cuál es el polinomio que representa el área de la superficie que se quiere pintar, sin tener en cuenta el área de las ventanas y de la puerta?

¿Cuántos metros cuadrados se deben pintar si $x = 4$ m, $y = 3$ m y $z = 2$ m?



Paso 1 Comprende el problema

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es el polinomio que representa el área de la superficie que se quiere pintar, sin tener en cuenta el área de las ventanas y de la puerta?, y ¿cuántos metros cuadrados se deben pintar si $x = 4$ m, $y = 3$ m y $z = 2$ m?

¿Cuáles son los datos del problema?

Hay siete ventanas, cada una con un área de 0,6 m². El área de la puerta es de 2 m² y las dimensiones de la casa se muestran en la figura.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Para hallar el polinomio que representa el área que se quiere pintar, se realizan los siguientes pasos:

$2(3z)(4y) = 24yz$ Se calcula el área de las paredes frontal y posterior.

$2(3x)(3z) = 18xz$ Se determina el área de las paredes laterales.

$2\left(\frac{x(4y)}{2}\right) = 4xy$ Se halla el área de la parte frontal y posterior del techo.

$2(5)(3x) = 30x$ Se calcula el área de la superficie de las tejas.

$(7)(0,6) = 4,2$ Se halla el área total de las siete ventanas.

Por tanto, el polinomio que representa el área que se quiere pintar es:

$$24yz + 18xz + 4xy + 30x - 4,2 - 2 = 24yz + 18xz + 4xy + 30x - 6,2$$

Así, para calcular la cantidad de metros cuadrados que se quiere pintar se remplazan los valores de x, y y z, y se resuelve así:

$24(3)(2) + 18(4)(2) + 4(4)(3) + 30(4) - 6,2$ Se remplazan x, y y z.

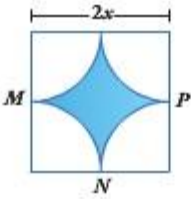
$= 144 + 144 + 48 + 120 - 6,2 = 449,8$ Se multiplica y se simplifica.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

El polinomio que representa el área que se quiere pintar es $24yz + 18xz + 4xy + 30x - 6,2$ y la cantidad de metros cuadrados que se deben pintar cuando $x = 4$ m, $y = 3$ m y $z = 2$ m es 449,8 m².

Responde las preguntas 114 y 115 de acuerdo con la siguiente situación.

Un diseñador gráfico crea el logotipo de una empresa a partir de un cuadrado como se muestra en la figura, en donde M, N y P son puntos medios de los lados.



114. ¿Cuál es el polinomio que representa el área sombreada del logotipo?

115. Si $x = 20$ cm, ¿cuál es el valor numérico del polinomio?

Responde las preguntas 116 a 118 de acuerdo con la siguiente información.

Para establecer el peso adecuado de una persona con relación a su estatura. Los médicos utilizan el índice de masa corporal (IMC), que está dado por:

$$\frac{m}{E^2}$$

Donde m es la masa corporal en kilogramos y E es la estatura en centímetros.



116. ¿Es la expresión para calcular el IMC un monomio? Justifica tu respuesta.

117. ¿Cuál es el IMC de una persona cuya masa corporal es 75 kg y su estatura, 1,8 m?

118. ¿Cómo varía el IMC de un niño si conserva su masa corporal y aumenta su estatura?

Resuelve las actividades 119 a 121 de acuerdo con el siguiente enunciado.

En movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, se aplica la siguiente expresion para calcular la velocidad final de un móvil.

$$V_f = \sqrt{v_0^2 + 2ax}$$

Donde v_0 es la velocidad inicial, a la aceleración y x el desplazamiento.

119. Si se conocen los valores de a y de v_0, de tal forma que x es la variable, ¿cuál es el grado absoluto de $v_0^2 + 2ax$?

120. Halla la velocidad final de un móvil si parte con una velocidad inicial de 59 km/h, acelera a razón de 20 km/h^2 y se desplaza 120 km.

121. Halla la velocidad final de un móvil si parte sin velocidad inicial, acelera a razón de 10 km/h^2 y se desplaza 80 km.

Resuelve las actividades 122 y 123 de acuerdo con la siguiente información.

Algunos nutricionistas aplican los siguientes polinomios para calcular la cantidad de calorías que debe consumir un hombre o una mujer según su peso (p) en kilogramos, su estatura (h) en metros y su edad (e) en años.

Mujeres: $66{,}5 + 13{,}8p + 5h - 6{,}8e$

Hombres: $66{,}5 + 9{,}6p + 1{,}9h - 4{,}7e$

122. Determina el término independiente en ambos polinomios.

123. Calcula las calorías necesarias para una mujer de 28 años, de 70 kg y 1,72 m de estatura.

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para calcular el costo de las facturas de los servicios públicos.

Los servicios públicos como la luz, el agua, el gas o el teléfono son necesarios, y es obligación del Gobierno garantizar la mayor cobertura posible de estos servicios. Sin embargo, esta cobertura requiere de un costo que depende del consumo, el estrato socioeconómico, los subsidios existentes y el tipo de residencia que recibe un determinado servicio.

Para calcular el costo de cada servicio público por vivienda, se aplican expresiones algebraicas cuyas variables dependen de la unidad de medida que se utilice para medir el servicio que se factura.

Por ejemplo, en el recibo de la luz, el cobro se realiza de acuerdo con la cantidad de energía eléctrica consumida durante determinado tiempo, cuya unidad de medida es el kilovatio hora (kWh). La cantidad de kilovatios hora que se consume en una vivienda por mes se muestra en la factura en un diagrama de barras como el que parece a continuación.



El costo en pesos para cada kilovatio hora se encuentra dado en la información del recibo, pero este valor depende del estrato socioeconómico y de que el establecimiento sea residencial o comercial. Si se multiplican los kilovatios hora consumidos (x) por el costo de cada kilovatio hora (y) se obtiene el valor neto que se debe pagar.

$$\text{Valor neto que se debe pagar} = x \cdot y$$

Para calcular el *total que se debe pagar* se tienen en cuenta los subsidios para los estratos 1, 2 y 3, que corresponden al porcentaje que se descuenta del valor neto para pagar. Así si z es el porcentaje de descuento por concepto del subsidio, entonces, la expresión algebraica que representa el total que se debe pagar es:

$$\text{Total que se debe pagar} = x \cdot y - z(x \cdot y)$$

Por ejemplo, para una vivienda de tipo residencial en Bogotá de estrato 3, el costo del kilovatio hora es de $355,9553 y este estrato recibe un subsidio del 15%. Por tanto, el total a pagar en este caso es:

$$355{,}9553 \cdot x - 0{,}15(355{,}9553x)$$

Donde x es la cantidad de kilovatios hora consumidos en cada vivienda. Así mediante esta expresión se puede calcular el consumo de cualquier vivienda que cumpla con las características nombradas.



Cabe aclarar que en este valor se pueden incluir intereses de mora cuando se tarda en pagar una factura dependiendo del número de días de retraso y la cuota de algún crédito que se haya obtenido en la vivienda.

1. **Consulta, ¿cómo se realiza el cobro en el servicio del agua?**
2. **¿Cuál es el grado del polinomio para la expresión algebraica del total a pagar del recibo de la luz?**
3. **Encuentra el total a pagar para el mes de marzo que se muestra en el diagrama de barras, si la factura corresponde a una vivienda estrato 3.**
4. **Observa el recibo de la luz de tu casa. Luego, plantea la expresión algebraica que permita hallar el costo total de la energía consumida.**

Trabaja con Microsoft Mathematics

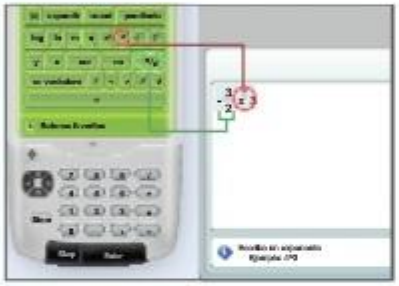
Objetivo: identificar el grado absoluto de un polinomio algebraico y calcular su valor numérico.

Descripción: escribir un polinomio algebraico en Microsoft Mathematics e identificar su grado absoluto. Luego, calcular su valor numérico.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en: www.microsoft.com/downloads/es-es/details.aspx?FamilyID=9caca722-5235-401c-8d3f-9e242b794c3a&displaylang=es

1. Haz clic en Microsoft Mathematics en el menú **Inicio**.

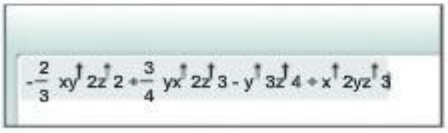
2. Despliega la calculadora en modo Estándar. Puedes escribir un polinomio utilizando la tecla ^, para los exponentes y la tecla **c/d** para las fracciones, como se muestra en la siguiente imagen.



3. Escribe el polinomio

$$-\frac{2}{3}xy^2z^2 + \frac{3}{4}yx^2z^3 - y^3z^4 + x^2yz^3$$

como se muestra a continuación. Luego, oprime la tecla **Enter**.



4. Aparecerá en el cuadro **Entrada** el polinomio que se digitó y en el cuadro **Resultado** el polinomio simplificado. Además, la calculadora ordena automáticamente los términos del polinomio de mayor a menor grado absoluto.



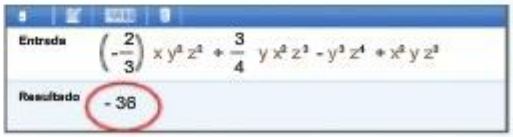
5. Para calcular el valor numérico del polinomio, digita el número que va a representar una de las variables. Luego, haz clic en el botón **almacén** y se activará una flecha. Finalmente, escribe la variable que va a tomar ese valor.



6. Oprime la tecla **Enter** y aparecerá el valor de la variable, en este caso de la variable *x*. Repite el mismo procedimiento para asignar los valores $y = 3$ y $z = -1$.



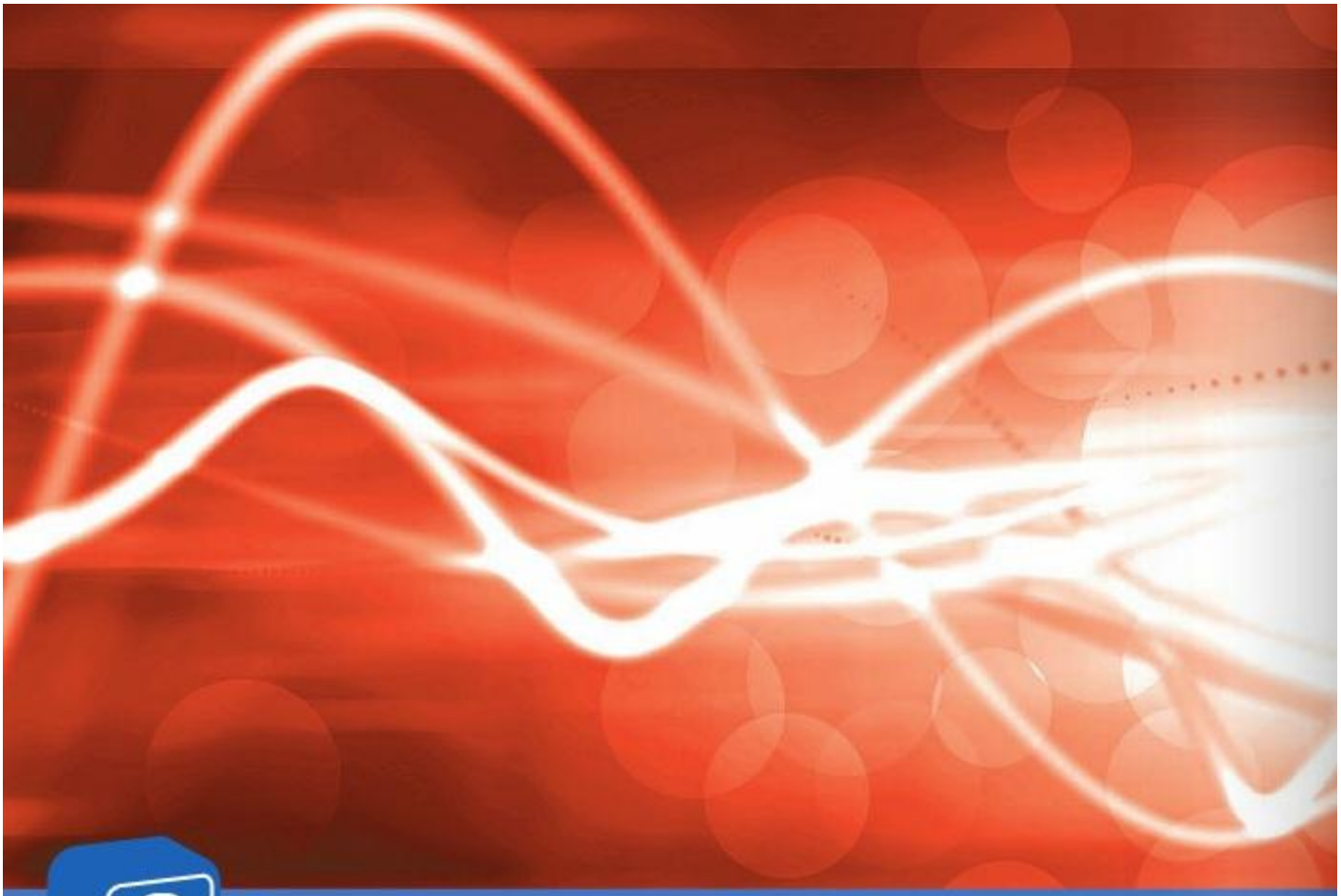
7. Haz doble clic en el polinomio del cuadro **Entrada.** Luego, oprime la tecla **Enter** y aparecerá el valor numérico del polinomio en el cuadro **Resultado,** según los valores asignados.



8. Utiliza Microsoft Mathematics para determinar el valor numérico de los siguientes polinomios cuando $a = -2$ y $b = 3$.

   a. $-ab^2 + \frac{1}{4}ab^3 - a^3b^2 + 9a^2b^3$

   b. $\frac{5}{3}a^2b^2 - \frac{3}{7}a^2b^3 + a^2b^4 - 11a^4b$



3 Operaciones entre polinomios

Estándares: Pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Realizar **adiciones y sustracciones** entre polinomios.
- Realizar **multiplicaciones y divisiones** entre polinomios.
- Conocer y aplicar el **teorema de residuo**.
- Aplicar las operaciones aditivas y multiplicativas entre polinomios en la **solución de problemas**.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño

3 Multimedia
1 Audio
1 Galería
11 Imprimibles
5 Actividades
1 Enlace web

Lo que sabes...

1. Clasifica el coeficiente de los siguientes monomios en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$.

   a. $0{,}3a^4b^7$
   b. $-\frac{\sqrt{2}}{3}h^5k^8$
   c. $-8x^2y^4z^7$
   d. $-\sqrt{5}\,xyz$
   e. $m^{11}n^{15}$
   f. $\frac{1}{5}k^2m$

2. Halla un monomio homogéneo y un monomio heterogéneo al monomio dado.

Monomio	Homogéneo	Heterogéneo
$-7xy^4z$		
$8a^4b^8c^{12}$		
$10w^{11}z$		
$-\frac{3}{2}m^5n^7p^{13}$		
$p^2q^2r^2$		



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para calcular la fuerza que se ejerce entre las partículas debido a su carga eléctrica.

La electrostática es una rama de la física que estudia las cargas eléctricas y la fuerza que se ejerce entre ellas cuando están en reposo.

Existen cargas positivas y negativas. Cuando se encuentran dos cargas del mismo signo tienden a separarse, mientras que si las cargas son de signos opuestos se atraen mutuamente.

:: Lee más acerca de este tema en la página 78.

Cronología de las operaciones con expresiones algebraicas

Babilonia. Los babilonios desarrollaron sistemas matemáticos donde realizaron operaciones con expresiones algebraicas para calcular valores desconocidos.

1000 a. C.

China. En los escritos de Quin Jui Shao, Li ye Hui y Zhu Shi Jie, usaron operaciones con expresiones algebraicas para encontrar valores desconocidos.

1250 d. C.

Francia. Pierre Fermat indicó que para un exponente mayor a dos no existe ninguna suma de dos potencias que dé como resultado otro entero con el mismo exponente.



1637 d. C.

Alemania. Grassmann construyó la teoría algébrico-geométrica de las magnitudes que no cumplen la propiedad conmutativa mediante operaciones algebraicas.

1844 d. C.

Italia. Paolo Ruffini mostró un método para realizar la división de cualquier polinomio entre un binomio.

1807 d. C.

Irak. Muhammad al-Juarismi, en su tratado titulado *Hisāb al-jabr wa'l muqābala* realizó operaciones con símbolos para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas.

820 d. C.

Egipto. Herón de Alejandría, en sus escritos, describió el área de un triángulo como la raíz de un producto de expresiones algebraicas.



50 d. C.

1. Operaciones aditivas entre polinomios

Las operaciones entre polinomios son útiles ya que son la base para todo el desarrollo del álgebra y, de ahí, las otras ramas de las matemáticas.

Historia de las matemáticas

Al-Karaji (fines del siglo X)

Matemático árabe. Escribió el tratado *Al-Fajri* en el cual definió el álgebra como la ciencia que trata de determinar magnitudes desconocidas con ayuda de las conocidas.

Utilizó los algoritmos de la aritmética para aplicarlos a las expresiones algebraicas, y las utilizó en la adición y sustracción de polinomios y en la multiplicación y división de un polinomio por un monomio.



1.1 Adición y sustracción de monomios

Para sumar o restar dos o más monomios se requiere que estos sean semejantes. Para ello, se suman o se restan los respectivos coeficientes de cada monomio y a continuación se escribe la misma parte literal. A este proceso se le denomina **reducción de términos semejantes**. Por ejemplo, al reducir los términos semejantes de los monomios $2m^3n^4$ y $6m^3n^4$ se tiene: $2m^3n^4 + 6m^3n^4 = (2 + 6)m^3n^4 = 8m^3n^4$.

EJEMPLOS

1. Sumar cada grupo de monomios.

a. $3x^4y^3$ y $7x^4y^3$.

Primero, se verifica que los dos monomios sean semejantes para poder reducir los términos mediante la adición.

Luego, se suman los coeficientes de cada monomio y la parte literal se deja igual, así:

$3x^4y^3 + 7x^4y^3 = (3 + 7)x^4y^3 = 10x^4y^3$.

b. $3m^3n^2$; $-4m^3n^2$; $-5m^3n^2$.

Primero, se verifica que los monomios son semejantes ya que su parte literal es la misma.

Luego, se suman los coeficientes teniendo en cuenta sus signos así:

$3m^3n^2 + (-4m^3n^2) + (-5m^3n^2)$

$= (3 + (-4) + (-5))m^3n^2$ Se plantea la suma entre los coeficientes de los monomios.

$= (3 - 4 - 5)m^3n^2$ Se eliminan paréntesis.

$= -6m^3n^2$ Se realizan las operaciones indicadas entre coeficientes.

2. De $5r^4y^2$ restar $2r^4y^2$.

Primero, se plantea la resta y se verifica que los monomios sean semejantes.

La resta es $5r^4y^2 - 2r^4y^2$.

Luego, se restan los coeficientes de cada monomio y la parte literal se deja igual:

$5r^4y^2 - 2r^4y^2 = (5 - 2)r^4y^2 = 3r^4y^2$

3. Restar $-7u^8v^7$ de $9u^8v^7$.

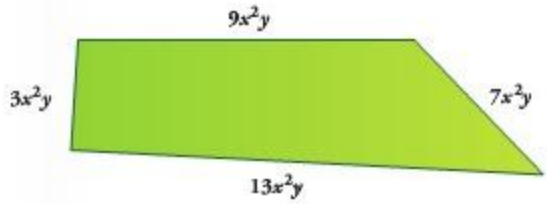
Primero, se plantea la resta y se verifica que los monomios sean semejantes.

La resta es $9u^8v^7 - (-7u^8v^7)$.

Luego, se restan los coeficientes de cada monomio y la parte literal se deja igual:

$9u^8v^7 - (-7u^8v^7) = 9u^8v^7 + 7u^8v^7 = (9 + 7)u^8v^7 = 16u^8v^7$

4. Encontrar una expresión algebraica para el perímetro del siguiente polígono.



Primero, como el perímetro de un polígono está dado por la suma de sus lados, entonces se expresa el perímetro como una suma, así:

$$\text{Perímetro} = 3x^2y + 9x^2y + 7x^2y + 13x^2y$$

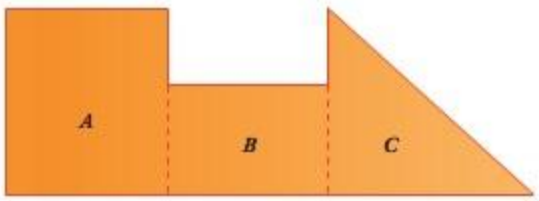
Luego, se suman los coeficientes de los términos semejantes:

$$\begin{aligned}\text{Perímetro} &= 3x^2y + 9x^2y + 7x^2y + 13x^2y \\ &= (3 + 9 + 7 + 13)x^2y \\ &= 32x^2y\end{aligned}$$

Por tanto, el perímetro del polígono es $32x^2y$.

5. Determinar una expresión algebraica para el área de la siguiente figura, teniendo en cuenta que:

El área de la región *A* es $8m^3n$.
El área de la región *B* es $6m^3n$.
El área de la región *C* es $10m^3n$.



Primero, como la figura está compuesta por tres regiones, dos rectángulos y un triángulo, el área total de la figura es la suma de las áreas de las tres regiones, así:

$$\text{Área total} = 8m^3n + 6m^3n + 10m^3n$$

Luego, se suman los términos semejantes:

$$\begin{aligned}\text{Área total} &= 8m^3n + 6m^3n + 10m^3n \\ &= (8 + 6 + 10)m^3n = 24m^3n\end{aligned}$$

Por tanto, el área total de la figura es $24m^3n$.

6. Expresar el área de la región sombreada mediante una expresión algebraica:



Área del rectángulo: $\frac{13}{5}m^3n^4z$

Área del círculo: $\frac{7}{20}m^3n^4z$

Primero, se escribe una resta que indique el área de la región sombreada, para ello se escribe la diferencia entre del área del rectángulo, menos el área del círculo.

$$\text{Área sombreada} = \frac{13}{5}m^3n^4z - \frac{7}{20}m^3n^4z$$

Luego, se restan los coeficientes de los términos semejantes:

$\left(\frac{13}{5} - \frac{7}{20}\right)m^3n^4z$ Se plantea la resta de los términos.

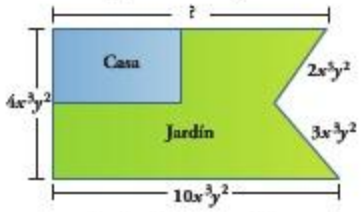
$= \left(\frac{52}{20} - \frac{7}{20}\right)m^3n^4z$ Se amplifican las fracciones al común denominador.

$= \frac{45}{20}m^3n^4z$ Se restan los numeradores y se deja el denominador.

$= \frac{9}{4}m^3n^4z$ Se simplifica si es posible.

Por tanto, el área de la región sombreada de la figura es $\frac{9}{4}m^3n^4z$.

7. Determinar la expresión algebraica para la medida del lado que hace falta, teniendo en cuenta que el perímetro de la figura es $28x^3y^2$.



Primero, se suman los lados conocidos, así:

$$4x^3y^2 + 10x^3y^2 + 3x^3y^2 + 2x^3y^2$$
$$= (4 + 10 + 3 + 2)x^3y^2$$
$$= 19x^3y^2$$

Luego, al perímetro de la figura se le resta la suma anterior así:

$$\begin{aligned}\text{Lado desconocido} &= 28x^3y^2 - 19x^3y^2 \\ &= (28 - 19)x^3y^2 = 9x^3y^2\end{aligned}$$

Finalmente, la expresión que indica la medida del lado desconocido es $9x^3y^2$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Propongo · Razono · Soluciono problemas

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si no lo es. Justifica tu respuesta.

1. Si se cambia el orden de los sumandos en una adición de dos o más monomios, el resultado de la suma también cambia. ( )
2. Al sumar o restar dos monomios semejantes se obtiene como resultado un monomio semejante a estos. ( )
3. Al restar dos monomios la diferencia nunca puede ser cero. ( )

Suma cada grupo de monomios.

4. $p, 4p$
5. $3xy, xy$
6. $5rs, 7rs$
7. $-2tu, 5tu, 2tu$
8. $-8xy, -6xy$
9. $\frac{3}{2}rs, 8rs$
10. $\frac{8}{3}mn, \frac{4}{6}mn, 6mn$
11. $a, -2a, -a, 3a$
12. $x^2, -3x^2, -5x^2$
13. $y, -2y, -5y$
14. $-3x^2, -x^2, -2x^2$
15. $\frac{2}{5}m^2n, -4m^2n, 8m^2n$
16. $\frac{7}{6}x^2, -5x^2, -\frac{7}{6}x^2$
17. $m^3n^2, \frac{1}{5}m^3n^2, -7m^3n^2$

Escribe un trío de monomios tal que la adición sea la expresión que se indica en cada caso.

18. $2xy$
19. $-mn$
20. $\frac{2}{5}xy$
21. $10x^2y$
22. $35xym$
23. $8vw$
24. $\frac{3}{4}r^2s$
25. $-\frac{3}{2}x^3$
26. $5p^2q^2$
27. $\frac{1}{2}xt^2$

Resuelve.

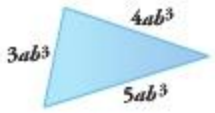
28. Completa los monomios en el cuadrado mágico si se sabe que la suma de cada fila, columna y diagonal es $22x^2$.

$10x^2$	x^2	$4x^2$	
		$6x^2$	$8x^2$
	$5x^2$	$8x^2$	
		$4x^2$	x^2

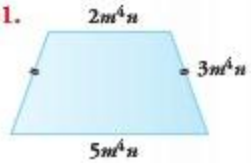
29. ¿Cuál es el resultado de la suma de todos los monomios del cuadrado mágico?

Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

30.

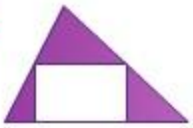


31.



Halla el área sombreada de las siguientes figuras.

32.



$A_{\triangle} = 10x^2$

$A_{\square} = \frac{12}{5}x^2$

33.

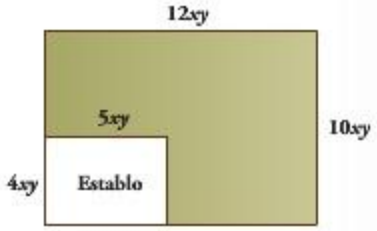


$A_{\triangle} = 7x^2y$

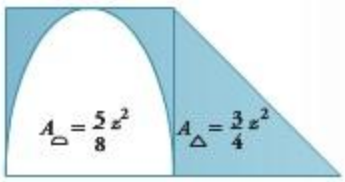
$A_{\square} = 21x^2y$

Resuelve.

34. El señor López construye un establo y deja una zona verde, para que sus caballos puedan caminar, como se muestra en el plano. El señor quiere cercar el perímetro de la zona verde con hileras de alambre. Determina mediante una expresión algebraica la cantidad de alambre que el señor López necesita.



35. El siguiente plano muestra el perfil de un puente. El constructor quiere pintar el área sombreada de color verde. Determina el área que se quiere pintar.



Ten en cuenta que:

$$A_{\square} = \frac{9}{4}z^2$$

1.2 Adición y sustracción de polinomios

Recursos imprimibles

Para determinar las operaciones aditivas entre polinomios, se realiza lo que se indica a continuación.

- Para **sumar dos polinomios**: primero, se escriben los polinomios y luego, se reducen los términos semejantes de los polinomios dados.
- Para **restar dos polinomios**: primero, se plantea la suma del primer polinomio con el opuesto del segundo y luego, se reducen los términos semejantes.

Recuerda que...

$-(a+b) = -a-b$

$-(-a+b) = +a-b$

$+(a-b) = +a-b$

$+(-a-b) = -a-b$

EJEMPLOS

1. Sumar $3x^2y + 8y^3 + 5xy^2$ y $7x^2y - 3y^3 + xy^2$

Primero, se plantea la suma, así:

$$(3x^2y + 5xy^2 + 8y^3) + (7x^2y + xy^2 - 3y^3)$$

Segundo, se suprimen los paréntesis, teniendo en cuenta los signos de cada término.

$$3x^2y + 5xy^2 + 8y^3 + 7x^2y + xy^2 - 3y^3$$

Luego, se agrupan los términos semejantes.

$$(3x^2y + 7x^2y) + (5xy^2 + xy^2) + (8y^3 - 3y^3)$$

Por último, se reducen los términos semejantes operando los coeficientes.

$$10x^2y + 6xy^2 + 5y^3$$

Esta suma también se puede realizar ordenando los polinomios en forma descendente y ubicando los términos semejantes uno debajo del otro. Luego, se realizan las sumas de los coeficientes de los términos semejantes, así:

$$\begin{array}{r} 3x^2y + 5xy^2 + 8y^3 \\ +\ 7x^2y + \ xy^2 - 3y^3 \\ \hline 10x^2y + 6xy^2 + 5y^3 \end{array}$$

2. Restar $7p^4q^3 - 3p^2q + 5p^3q^2$ de $6p^3q^2 - 8p^2q + 5p^4q^3$

Primero, se plantea la resta mediante signos de agrupación. Para ello se ordenan los polinomios, así:

$$(5p^4q^3 + 6p^3q^2 - 8p^2q) - (7p^4q^3 + 5p^3q^2 - 3p^2q)$$

Segundo, se suprimen los paréntesis, teniendo en cuenta los signos de cada término y el signo negativo que está antes del paréntesis.

$$5p^4q^3 + 6p^3q^2 - 8p^2q - 7p^4q^3 - 5p^3q^2 + 3p^2q$$

Tercero, se identifican y asocian los términos semejantes.

$$(5p^4q^3 - 7p^4q^3) + (6p^3q^2 - 5p^3q^2) + (-8p^2q + 3p^2q)$$

Finalmente, se reducen los términos semejantes.

$$-2p^4q^3 + p^3q^2 - 5p^2q$$

3. La pared del dibujo se piensa recubrir con tres trozos de papel de colgadura. Determinar si es suficiente la cantidad de papel para cubrir la pared de la figura.



Trozos

$A=\frac{5}{6}x^3-3x^2+\frac{5}{4}x$

$A=-\frac{5}{12}x^3+\frac{8}{3}x^2+8$

$A=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{4}x-7$

Para determinar si es suficiente la cantidad de papel se realiza lo siguiente.

Primero, se suman los polinomios correspondientes a los trozos de papel así:

$$\begin{array}{r} \frac{5}{6}x^3 - \ 3x^2 + \frac{5}{4}x \\ -\frac{5}{12}x^3 + \frac{8}{3}x^2 \qquad + 8 \\ \frac{1}{3}x^3 + \ \ x^2 - \frac{1}{4}x - 7 \\ \hline \frac{9}{12}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{4}x + 1 \end{array}$$

Al simplificar es igual a $\frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + x + 1$.

Luego, se resta el resultado anterior del área de la pared así:

$$\begin{array}{r} \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \ \ x + 1 \\ -\frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \ \ x - 1 \\ \hline 0x^3 + \ 0x^2 + 0x + 0 \end{array}$$

Por tanto, como el resultado fue cero, sí es suficiente la cantidad de papel para cubrir la pared.

Historia de las matemáticas

François Viéte



Matemático francés (1540-1603), se considera uno de los precursores del álgebra. Introdujo a la aritmética y al álgebra varios signos de agrupación.

1.3 Signos de agrupación

Recurso imprimible Actividad

Los **signos de agrupación** se utilizan para reunir términos o expresiones algebraicas relacionadas por las diferentes operaciones aritméticas. Las expresiones contenidas entre ellos, indican que estas deben considerarse como una sola cantidad. Los signos de agrupación más utilizados son los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves { }.

Los signos de agrupación se suprimen de dentro hacia fuera, teniendo en cuenta lo siguiente:

- Si el signo de agrupación está precedido de un signo más (+), las cantidades que están dentro de él permanecen con el mismo signo.
- Si el signo de agrupación está precedido de un signo menos (−), las cantidades que están dentro de él cambian de signo.

EJEMPLOS

Suprimir los signos de agrupación y realizar las operaciones.

a. $7x - \{-3x - [5y - 4x + (2y - 3x) - (-8x - 4y) + 2x] - 5y\}$

Primero, se eliminan los paréntesis.

$7x - \{-3x - [5y - 4x + 2y - 3x + 8x + 4y + 2x] - 5y\}$

Segundo, se eliminan los corchetes.

$7x - \{-3x - 5y + 4x - 2y + 3x - 8x - 4y - 2x - 5y\}$

Tercero, se eliminan las llaves.

$7x + 3x + 5y - 4x + 2y - 3x + 8x + 4y + 2x + 5y$

Luego, se agrupan los términos semejantes.

$(7x + 3x - 4x - 3x + 8x + 2x) + (5y + 2y + 4y + 5y)$

Por último, se reducen los términos semejantes.

$13x + 16y$

Entonces, $7x - \{-3x - [5y - 4x + (2y - 3x) - (-8x - 4y) + 2x] - 5y\} = 13x + 16y$.

b. $-\frac{3}{4}q^2 + \left\{\frac{2}{5}p^3 - \left[\frac{3}{7}q^2 + \frac{4}{3}q^2 - \left(\frac{1}{5}p^3 + \frac{2}{3}q^3\right)\right]\right\}$

Otra manera para suprimir los signos de agrupación es eliminando signos de agrupación y reduciendo los términos semejantes en cada paso así.

Primero, se eliminan los paréntesis y se reducen los términos semejantes.

$-\frac{3}{4}q^2 + \left\{\frac{2}{5}p^3 - \left[\frac{37}{21}q^2 - \frac{1}{5}p^3 - \frac{2}{3}q^3\right]\right\}$

Segundo, se eliminan los corchetes y se reducen los términos semejantes que están dentro de las llaves.

$-\frac{3}{4}q^2 + \left\{\frac{3}{5}p^3 - \frac{37}{21}q^2 + \frac{2}{3}q^3\right\}$

Luego, se eliminan las llaves, se reducen los términos semejantes y se ordena.

$\frac{3}{5}p^3 - \frac{211}{84}q^2 + \frac{2}{3}q^3$

Entonces, $-\frac{3}{4}q^2 + \left\{\frac{2}{5}p^3 - \left[\frac{3}{7}q^2 + \frac{4}{3}q^2 - \left(\frac{1}{5}p^3 + \frac{2}{3}q^3\right)\right]\right\} = \frac{3}{5}p^3 - \frac{211}{84}q^2 + \frac{2}{3}q^3$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Propongo · Modelo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Escribe el procedimiento que debes llevar a cabo para resolver la siguiente operación.

36. Restar $\frac{1}{4}x - \frac{4}{3}y + 5z$ de $\frac{7}{9}z + \frac{5}{7}y - 2x$

Realiza las operaciones entre polinomios.

37. $(5a - 2b + 3c) + (-7a + 9b - 2c)$

38. $\left(\frac{1}{5}x + 3y - 2z\right) - \left(\frac{3}{5}x - 2y\right)$

39. $(m + n - w) - (-2m - 3n - 4w)$

40. $(5y^2 + 3y) + \left(5y - \frac{1}{4}y^2\right) + \left(\frac{1}{3}y^2 + y\right)$

41. $(1{,}5m + 2{,}3n + 5p) - (-2{,}3m - 3{,}2p + 12n)$

42. $\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}x\right) + \left(\frac{3}{4}x + 2y\right) - \left(\frac{3}{7} - 4x + 3y\right)$

Plantea la operación. Luego, resuélvela.

43. Restar $5x^2 + 6x$ de $-4x^2 - 3x + x^3$

44. Restar $-7y^2 + 8y$ de $-y^3 + 5y - 1$

45. De $\frac{3}{4}rs + \frac{1}{4}r^2s + \frac{5}{4}r^3s$ restar $\frac{1}{2}r^3s - \frac{1}{7}r^2s$

Determina el polinomio que resulta en cada expresión si

$A = 7m^2 + 3mn + 6n^2$

$B = -5m^3 + 5mn + 6m^2 - n^2$

$C = 6m^3 + 4mn - 2n^2 + m^2$

46. $A - B + C$

47. $A + B + C$

48. $A - B - C$

49. $(A + B) - (A - C)$

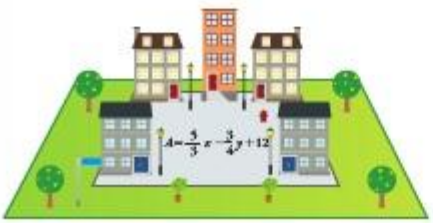
50. $(A - B) + (A + C)$

51. $A - (B + A + C)$

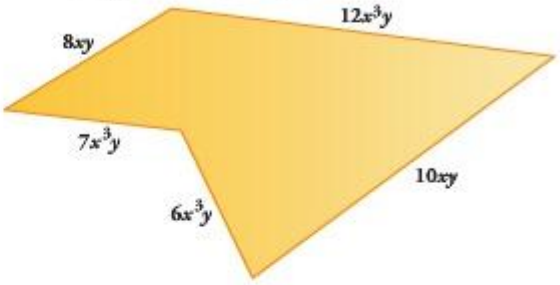
Resuelve.

52. Sobre el siguiente terreno se van a construir torres de edificios y se dispondrá de un área para las zonas verdes. Determina el área que se dispone para la zona verde.

Área total: $\frac{11}{3}x - \frac{10}{2}y + 4$



53. Un trabajador tiene que cercar un terreno como el de la figura. Si el primer día cerca una longitud correspondiente a $7x^3y + 3xy$. ¿Cuál es la longitud que debe cercar el segundo día, para cumplir con su trabajo?



54. **Escribe dos polinomios cuya diferencia sea la que se indica en cada caso.**

Primer polinomio	Segundo polinomio	Diferencia
		$5y^3 - 8y + 7$
		$\frac{1}{4}m^2 + 3mn + 4n^2$
		$-7x^2 + 3x^3 + 8x^4$
		$6p + 2q - \frac{1}{3}z$
		$4a + \frac{7b}{3} - 2c + \frac{8}{5}d$

Elimina los signos de agrupación y resuelve.

55. $-8 - \{-7y + [-6y + 4z - (2t - 3y + 5z)] + 3\}$

56. $3y^2 + 5y - (4y^2 + 5) - 8y^2 - (-7y - 3y^2)$

57. $7z - [(2z + y) - (-5y + 3z) + 9] - 12z$

58. $\left\{-\frac{7}{10}t - \left[-3u - \left(\frac{3}{4}t - 8u\right) - \frac{6}{5}t + 5u\right] + \frac{9}{2}t\right\}$

Escribe los paréntesis para que la igualdad se cumpla.

59. $6m^2 + 3n^2 - 5m^2 + 3n^2 = m^2$

60. $3a + 5b - 8b - 6a - 5b + 4a = 5a - 8b$

61. $3x + 4y + 3y + 5y - 2y + 6y - 5x = 8x + 4y$

62. $-\frac{1}{3}p + \frac{1}{4}q - \frac{5}{3}p + q - \frac{2}{3}p - \frac{3}{4}q - \frac{4}{3}p = -\frac{3}{2}q$

Ampliación multimedia

Recursos imprimibles

2. Operaciones multiplicativas entre polinomios

Recuerda que...

La potenciación se define como:

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots a}_{n\text{-veces,}}$ para $n \in \mathbb{Z}+$

Otras propiedades de la potenciación son:

$a^0 = 1, a \neq 0$

$a^1 = a$

$1^n = 1$

$0^n = 0, n \neq 0$

Para realizar multiplicaciones y divisiones entre polinomios, es necesario tener en cuenta las propiedades de la potenciación.

Propiedades de la potenciación

La potenciación cumple con las siguientes propiedades en el conjunto de los números reales.

Propiedad	Definición
Producto de potencias de igual base	Para multiplicar dos o más potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Cociente de potencias de igual base	Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Potencia de una potencia	Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
Potencia de un producto	La potencia de un producto es el producto de las potencias de cada uno de sus factores. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Potencia de un cociente	La potencia de un cociente es el cociente de las potencias de cada uno de sus factores. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ ; b \neq 0$
Exponente negativo	Todo número elevado a un exponente negativo, es una fracción cuyo numerador es 1 y su denominador es la misma potencia con exponente positivo. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a \neq 0$

2.1 Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos o más monomios se deben tener en cuenta las siguientes leyes:

- **Ley de signos**: en el producto de dos o más factores, si la cantidad de factores negativos es par, el resultado es una cantidad positiva; pero si la cantidad de factores negativos es impar, el resultado es una cantidad negativa.
- **Ley de coeficientes**: el coeficiente de un producto de dos o más factores es el producto de los coeficientes de cada uno de los factores.
- **Ley de exponentes**: para multiplicar dos o más potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

EJEMPLOS

1. Multiplicar los siguientes monomios.

a. $(-2x^2)(6x^3)$

$= (-2 \cdot 6)(x^2x^3)$ Se multiplican los coeficientes entre sí y las partes literales entre sí.

$= -12x^{2+3}$ Se aplica la ley de signos y propiedad del producto de potencias de igual base.

$= -12x^5$ Se suman los exponentes.

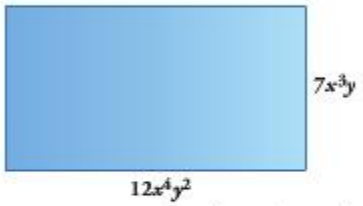
b. $\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)\left(-\frac{3}{2}x^3y^4\right)\left(\frac{4}{5}x^4y\right)$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)(x^2y^2x^3y^4x^4y)$ Se multiplican los coeficientes entre sí y las partes literales entre sí.

$= \frac{12}{20}x^9y^7$ Se aplica la ley de signos y propiedad del producto de potencias de igual base.

$= \frac{3}{5}x^9y^7$ Se simplifica si es necesario.

2. Encontrar una expresión algebraica para determinar el área del terreno de la figura.



Como el terreno es un rectángulo, y el área de un rectángulo se determina por el producto de su base por su altura, entonces, la expresión que determina el área de la figura es:

$(12x^4y^2)(7x^3y)$

Al realizar la multiplicación se tiene:

$(12 \times 7)(x^{4+3}y^{2+1}) = 84x^7y^3$

Luego, el área del terreno es $84x^7y^3$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Completa las siguientes frases con las palabras producto o mayor.

63. El grado del producto de dos monomios siempre es _____ que cualquiera de los factores.

64. El coeficiente del producto de dos o más monomios es el _____ de los coeficientes de cada uno de los factores.

Realiza las multiplicaciones entre monomios.

65. $(a^2b^3)(-a^3b^4c)$

66. $(-8pq^2x)(p^2qr^3)$

67. $(-5pxr)(7x^2q)\left(\frac{1}{35}x^2rq^2p^2\right)$

68. $\left(\frac{3}{7}x^2r^5\right)\left(-\frac{7}{3}x^3p^4q\right)\left(\frac{2}{5}xr^6p^3\right)$

69. $(2p^5q)(-13px^5)(-pq^4r^3x)$

70. $\left(\frac{3}{4}x^6r^2\right)\left(\frac{7}{2}p^4r^7\right)\left(\frac{2}{3}xq^2\right)$

71. $(6xq^3rp^6)(-4p^3q^6xr^8)$

72. $(9ab^3c)(11a^2b^6c)$

73. $(-5l^2m^3n)(7l^3m^2n)$

74. $(6x^2y^5z)(-8x^2y^4)$

75. $\left(\frac{1}{2}xy^2\right)\left(\frac{3}{4}x^3y^3\right)$

Selecciona las tarjetas cuyo producto corresponde a cada uno de los siguientes monomios.

76. $12x^3y^3$

$3x^2y$	$4x^2y$	$3xy$	$4xy^2$

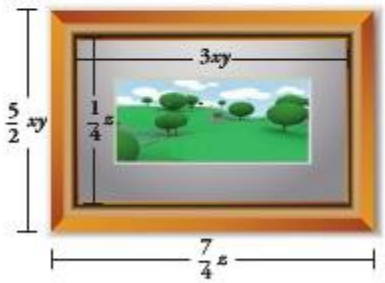
77. $-8m^9n^3$

$4m^3n^2$	$-4m^3n$	$-2m^6n^2$	$2m^6n^2$

78. $-64p^8q^6$

$8p^2q$	$-4p^8q^5$	$8p^6q^5$	$16q$

Observa las dimensiones del siguiente portarretrato.



79. Escribe la expresión que determina el área disponible para la fotografía del portarretrato.

2.2 Multiplicación de un monomio por un polinomio

Matemáticamente

¿Cómo podrías explicar la semejanza entre las siguientes multiplicaciones?

(521)(7)

$(5x^2 + 2x + 1)(7x)$

Para multiplicar un monomio por un polinomio se debe aplicar la propiedad distributiva para la suma. Es decir, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta las leyes para la multiplicación de monomios.

EJEMPLOS

1. Multiplicar $3x^2$ por $5x^3y^3 + 4x^2y^2 - 2xy$.

$(3x^2)(5x^3y^3 + 4x^2y^2 - 2xy)$ Se plantea la multiplicación.

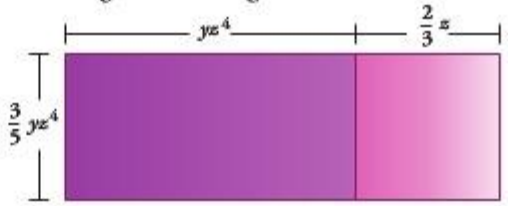
$= (3x^2)(5x^3y^3) + (3x^2)(4x^2y^2) - (3x^2)(2xy)$ Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

$= 15(x^2)(x^3y^3) + 12(x^2)(x^2y^2) - 6(x^2)(xy)$ Se multiplican los coeficientes entre sí.

$= 15x^5y^3 + 12x^4y^2 - 6x^3y$ Se aplica el producto de potencias de igual base.

$(3x^2)(5x^3y^3 + 4x^2y^2 - 2xy) = 15x^5y^3 + 12x^4y^2 - 6x^3y$

2. Determinar el área del siguiente rectángulo.



Primero, como el área de un rectángulo es base por altura, entonces el área de la figura se puede expresar así: $A = \frac{3}{5}yz^4\left(yz^4 + \frac{2}{3}z\right)$

Luego, se tiene el producto de un monomio por un binomio. Por tanto, se resuelve así:

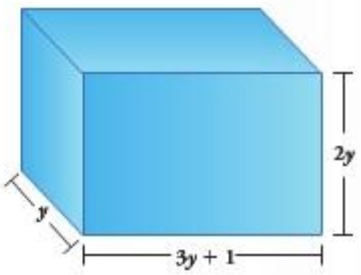
$A = \left(\frac{3}{5}yz^4\right)(yz^4) + \left(\frac{3}{5}yz^4\right)\left(\frac{2}{3}z\right)$ Se distribuye el monomio a cada uno de los términos del binomio.

$A = \frac{3}{5}(yz^4)(yz^4) + \frac{2}{5}(yz^4)(z)$ Se multiplican los coeficientes entre sí.

$A = \frac{3}{5}y^2z^8 + \frac{2}{5}yz^5$ Se aplica el producto de potencias de igual base.

Por tanto, el área del rectángulo es $\frac{3}{5}y^2z^8 + \frac{2}{5}yz^5$.

3. El largo de una caja de caras rectangulares es el triple del ancho aumentado en uno y su altura es el doble del ancho. Encontrar una expresión algebraica para el volumen de la caja.



Primero, se representa el ancho de la caja con la expresión y.

Segundo, se representan las otras dos dimensiones teniendo en cuenta el ancho de la caja:

El largo es $3y + 1$ y el alto es $2y$.

Luego, como el volumen de una caja de cara rectangular es igual al producto del largo, por el ancho, por el alto, entonces, el volumen de la caja se representa como:

$V = (3y + 1) \times y \times 2y = (3y + 1) \times 2y^2 = 6y^3 + 2y^2$.

Por tanto, el volumen de la caja es $6y^3 + 2y^2$.

2.3 Multiplicación de polinomios

Recurso imprimible Actividad

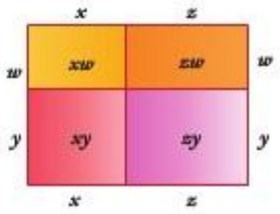
El **producto de dos polinomios** es otro polinomio que se obtiene al multiplicar los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro. Para ello, se aplica la propiedad distributiva.

En la figura 1, se muestra un rectángulo cuyos lados miden $x + z$ y $y + w$, respectivamente. Para determinar el área A del rectángulo, se multiplica la base por la altura y se obtiene:

$$A = (x + z)(y + w)$$

El área está representada por el producto de dos binomios. Para resolver dicho producto se aplica varias veces la propiedad distributiva del producto, respecto a la suma.

$$(x + z)(y + w) = x(y + w) + z(y + w)$$
$$= xy + xw + zy + zw$$



$A = (x + z)(y + w)$

$A = xy + xw + zy + zw$

Figura 1.

EJEMPLOS

1. Resolver los productos entre polinomios.

a. $(5x^2 + 3y^2)(4x^2 - 2y^3)$

Se debe multiplicar $5x^2$ por $4x^2 - 2y^3$ y $3y^2$ por $4x^2 - 2y^3$.

$(5x^2)(4x^2) + (5x^2)(-2y^3) + (3y^2)(4x^2) + (3y^2)(-2y^3)$ Se plantean las multiplicaciones.

$= 20x^4 - 10x^2y^3 + 12x^2y^2 - 6y^5$ Se multiplica.

Luego, $(5x^2 + 3y^2)(4x^2 - 2y^3) = 20x^4 - 10x^2y^3 + 12x^2y^2 - 6y^5$.

b. $-\frac{9}{2}m - \frac{7}{3}n$ **por** $\frac{1}{3}m - \frac{5}{6}n + mn$

$\left(-\frac{9}{2}m - \frac{7}{3}n\right)\left(\frac{1}{3}m - \frac{5}{6}n + mn\right)$ Se plantea la multiplicación.

$= \left(-\frac{9}{2}m\right)\left(\frac{1}{3}m\right) + \left(-\frac{9}{2}m\right)\left(-\frac{5}{6}n\right) + \left(-\frac{9}{2}m\right)(mn) +$

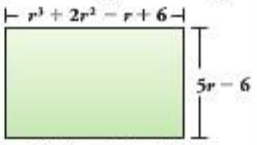
$+ \left(-\frac{7}{3}n\right)\left(\frac{1}{3}m\right) + \left(-\frac{7}{3}n\right)\left(-\frac{5}{6}n\right) + \left(-\frac{7}{3}n\right)(mn)$ Se aplica la propiedad distributiva.

$= -\frac{9}{6}m^2 + \frac{45}{12}mn - \frac{9}{2}m^2n - \frac{7}{9}mn + \frac{35}{18}n^2 - \frac{7}{3}mn^2$ Se multiplican los monomios entre sí.

$= -\frac{9}{2}m^2n - \frac{3}{2}m^2 - \frac{7}{3}mn^2 + \frac{107}{36}mn + \frac{35}{18}n^2$ Se reducen los términos semejantes y se simplifica.

Luego, el resultado de la multiplicación es $-\frac{9}{2}m^2n - \frac{3}{2}m^2 - \frac{7}{3}mn^2 + \frac{107}{36}mn + \frac{35}{18}n^2$

2. Hallar el área del rectángulo de la figura.



Se debe multiplicar la base por la altura así:

$A = (r^3 + 2r^2 - r + 6)(5r - 6)$

$A = r^3(5r) + r^3(-6) + 2r^2(5r) + 2r^2(-6) - r(5r) - r(-6) + 6(5r) + 6(-6)$

$A = 5r^4 - 6r^3 + 10r^3 - 12r^2 - 5r^2 + 6r + 30r - 36 = 5r^4 + 4r^3 - 17r^2 + 36r - 36$

Luego, el área del rectángulo es $5r^4 + 4r^3 - 17r^2 + 36r - 36$.

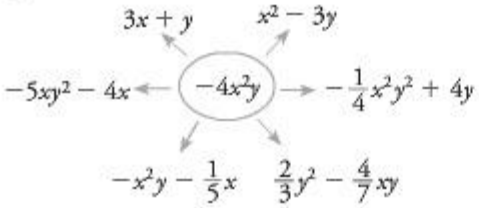
Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

80. Completa la tabla de acuerdo con la información.

Figura	Perímetro	Área
Cuadrado Lado: $x^3 + 2x$		
Rectángulo Base: $x + 2y$ Altura: $5x + 4y$		

81. Multiplica el monomio del centro del diagrama por cada uno de los binomios.



Realiza las multiplicaciones entre polinomios.

82. $(6ab + 10)(7a - 2b)$

83. $(-12mn + 5)(-3mn - 2)$

84. $(3a - 5b + 3c)(4a + 2b + c)$

85. $(5x + 8y + 12)(-3x - 4y + 9)$

86. $(-3x^2y - 2xy^2 - xy)(x^2 - y^2)$

87. $(9m - n + 3m^2 + 2)(m - n)$

88. $(4p - 2q + r)(-3p + 5q - 12)$

89. $(2n + 5s - 3t)(8n - 2r + 4t)$

90. $\left(\frac{21}{4}x + 3y\right)(5x - 8y + 6)$

91. $\left(\frac{1}{9}x^4 - 2x^{a+1}\right)(4x^{2a-2} + 3)$

92. $\left(-\frac{1}{6}p^{4+3x} - \frac{2}{7}q^{4-2x}\right)(p + 4q)$

Dado el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^2$, colorea las expresiones equivalentes a $P(x)$.

93. $(x^3 + 2) \cdot x$

94. $(x^3 + 2x) \cdot x$

95. $(x^2 + 2) \cdot x$

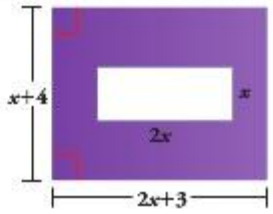
96. $(x^2 + 2x) \cdot x$

Realiza lo que se indica en cada caso.

97. Demuestra geométricamente que:

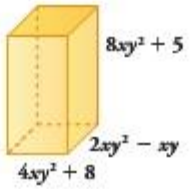
$(x + 7)(x + 3) = x^2 + 10x + 21$.

98. Demuestra que el área morada es igual a $11x + 12$.

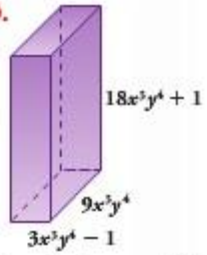


Halla el volumen de cada caja.

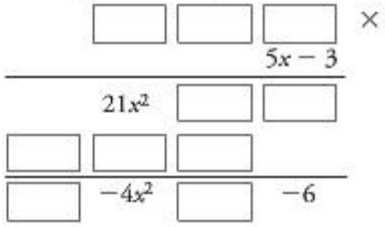
99.



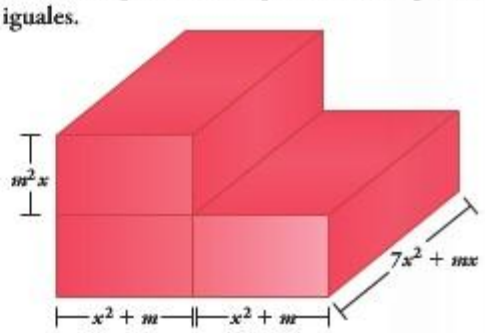
100.



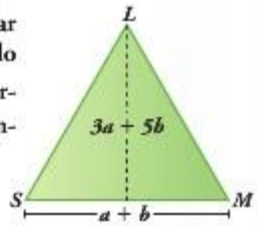
101. Completa las casillas con los términos que faltan en la siguiente multiplicación.



102. Determina el volumen que ocupa el sofá que se diseñó a partir de tres prismas rectangulares iguales.



103. La fórmula para hallar el área de un triángulo es $A = \frac{b \times h}{2}$. Determina el área del triángulo de la figura.



2.4 División de monomios

En la figura 2 se muestra un cuadrado de lado $2r$ y un círculo de radio r. La razón o cociente entre sus áreas se expresa como:

$$\frac{(2r)^2}{\pi r^2} = \frac{4r^2}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi}$$

El **cociente de dos monomios** es otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes, y la parte literal es el cociente de las partes literales aplicando la división de potencias de igual base.

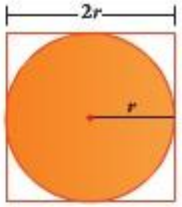


Figura 2.

2.5 División de un polinomio entre un monomio

Recurso imprimible

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio respectivo. Luego, se siguen las reglas de división entre monomios.

EJEMPLOS

1. Dividir.

a. $-27x^5y^2$ **entre** $3x^3y$

$\frac{-27x^5y^2}{3x^3y}$ Se plantea la división entre monomios.

$= \left(\frac{-27}{3}\right)\left(\frac{x^5y^2}{x^3y}\right)$ Se plantean las divisiones de los coeficientes y las partes literales.

$= -9(x^{5-3})(y^{2-1})$ Se aplica el cociente de potencias iguales.

$= -9x^2y$ Se realizan las operaciones.

En conclusión, $\frac{-27x^5y^2}{3x^3y} = -9x^2y$.

b. $\frac{2}{5}m^8n^4o^2$ **entre** $4m^4n^2o^2$

$\frac{\frac{2}{5}m^8n^4o^2}{4m^4n^2o^2}$ Se plantea la división entre monomios.

$= \left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{1}}\right)\left(\frac{m^8n^4o^2}{m^4n^2o^2}\right)$ Se plantean las divisiones de los coeficientes y las partes literales.

$= \left(\frac{2}{20}\right)(m^{8-4}n^{4-2}o^{2-2})$ Se aplica el cociente de potencias iguales.

$= \frac{1}{10}m^4n^2$ Se realizan las operaciones.

Por tanto, $\frac{\frac{2}{5}m^8n^4o^2}{4m^4n^2o^2} = \frac{1}{10}m^4n^2$.

2. Realizar las divisiones de polinomios entre monomios.

a. $\frac{-8x^5y^2 + 2x^4y^3}{4x^2y^2}$

$= \frac{-8x^5y^2}{4x^2y^2} + \frac{2x^4y^3}{4x^2y^2}$ Se divide cada término del binomio entre el monomio dado.

$= \left(\frac{-8}{4}\right)\left(\frac{x^5y^2}{x^2y^2}\right) + \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{x^4y^3}{x^2y^2}\right)$ Se plantean las divisiones de los coeficientes y las partes literales.

$= (-2)(x^{5-2}y^{2-2}) + \left(\frac{1}{2}\right)(x^{4-2}y^{3-2}) = -2x^3 + \frac{1}{2}x^2y$ Se aplica la división de potencias iguales.

Luego, $\frac{-8x^5y^2 + 2x^4y^3}{4x^2y^2} = -2x^3 + \frac{1}{2}x^2y$.

b. $\frac{6x^{y+2} - 4x^y + 8x^{y+1}}{2x^{y-2}}$

$= \frac{6x^{y+2}}{2x^{y-2}} - \frac{4x^y}{2x^{y-2}} + \frac{8x^{y+1}}{2x^{y-2}}$ Se divide cada término del trinomio entre el monomio dado.

$= (3)(x^{(y+2)-(y-2)}) - (2)(x^{y-(y-2)}) + (4)(x^{(y+1)-(y-2)})$ Se aplica la división de potencias iguales.

$= 3x^4 - 2x^2 + 4x^3$ Se realizan las operaciones.

Así, $\frac{6x^{y+2} - 4x^y + 8x^{y+1}}{2x^{y-2}} = 3x^4 - 2x^2 + 4x^3$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · E Ejercito · R Razono · S Soluciono problemas

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si no lo es.

104. Al dividir dos monomios, los coeficientes de los monomios se restan. ( )

105. Al dividir un polinomio entre un monomio, el resultado puede ser un número entero. ( )

106. Al dividir un polinomio entre un monomio, el cociente siempre es de grado menor que el divisor. ( )

E 107. Completa la siguiente tabla.

$-24x^7y^6z^3$	÷	$12x^3y^3z$	=	
÷		÷		÷
$-\frac{2}{3}x^5y^2z$	÷	$-3x^2y^2$	=	
=		=		=
	÷		=	

E Realiza las siguientes divisiones entre monomios.

108. $2w \div -2w$

109. $-6m^4 \div 2m^2$

110. $14x^6 \div 7x^4$

111. $-8a^4b^5 \div 2ab$

112. $-6m^3n^4y^3 \div 3mn$

113. $2a^4b^3 \div 5a^3b^2$

114. $-9x^4y^2z^3 \div 3xyz^3$

115. $-5m^4n^3 \div 5m^2n^3$

116. $16w^5z^3 \div 4w^2z^3$

117. $4w^8y^6 \div (-2wy)$

Escribe y resuelve una división entre monomios para cada caso.

118. El cociente entre dos monomios es $-6r^5s^4$.

119. El grado del monomio que está en el dividendo es el doble del grado del cociente.

120. El cociente es un número entero negativo.

121. El cociente es un monomio que solo tiene una parte literal en dos variables cuyo grado absoluto es 7.

Revisa y corrige las siguientes divisiones entre monomios.

122. $(8x^4y^3 - 2xy) \div 4xy = 2x^2y^2$

123. $\left(-\frac{6}{5}p^7q^5 + \frac{5}{3}p^3q^2\right) \div (-7p^3q^2) = \frac{7}{3}p^2q$

124. $\left(7m^an^b - 5m^an^b\right) \div \left(-\frac{4}{5}n^c\right) = -\frac{35}{4}m^an^{b-c}$

125. $\left(\frac{-3}{5}s^{3a-2}t^{b+4}u^{3-a}\right) \div \left(\frac{5}{-2}s^{a+2}t^{-b-4}u^{-4+a}\right) = \frac{-6}{25}s^2t^{-b}u^a$

Completa cada igualdad con el polinomio que corresponda.

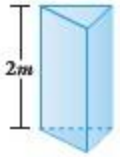
126. $\left(\frac{1}{2}a^2\right)(\square) = \frac{2}{5}a^5b$

127. $\left(\frac{2}{3}x^2y^3\right)(\square) = -\frac{2}{5}a^2x^6y^4$

128. $\left(\frac{1}{2}a\right)(\square) = \frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{3}ab - \frac{1}{6}b^2a$

129. $\left(\frac{2}{5}y\right)(\square) = \frac{1}{3}x^2y + \frac{7}{10}xy - \frac{1}{3}y^2$

R 130. Halla un polinomio que exprese el área del triángulo de la base del siguiente prisma.



Volumen $6m^2 - mn - 2n^2m$

S Resuelve las siguientes situaciones.

Catalina compra $27y^6z^5x^3 + 9y^5z^4x^3$ metros de hilo y emplea $3y^5z^2x^3$ metros para coser un vestido.



131. Halla la expresión que indica la cantidad de vestidos que puede confeccionar.

132. Si Catalina utiliza $12y^5z^4x^3 + 18y^5z^4x^4$ metros de hilo, ¿cuánto vestidos confeccionara?

La siguiente expresión muestra el número de boletas que debe vender cierta cantidad de estudiantes para poder ir a una excursión $\frac{80x^2 + 40x}{20x}$ donde x representa la cantidad de estudiantes.

133. Simplifica la expresión anterior.

134. Si un director de grupo tiene 30 estudiantes, ¿cuántas boletas deben vender sus estudiantes?

2.6 División de un polinomio entre otro polinomio

Recurso imprimible · Ampliación multimedia

Para dividir dos polinomios se puede utilizar el método habitual (para todo tipo de divisores) y la división sintética o regla de Ruffini (para divisores de la forma $x \pm a$).

Método habitual

Primero, se ordenan los polinomios en forma descendente con respecto a una de las variables.

Segundo, se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

El resultado será el primer término del cociente.

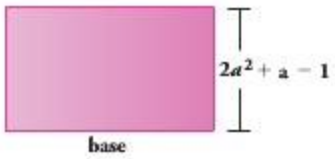
Tercero, dicho término se multiplica por cada uno de los términos del divisor. Cada producto se resta de su semejante en el dividendo y se tienen en cuenta los respectivos cambios de signo. Si alguno de estos productos no tiene término semejante en el dividendo, se escribe en el lugar correspondiente conforme al orden del dividendo.

Cuarto, se baja el siguiente término del dividendo. Se divide el primer término del dividendo parcial entre el primer término del divisor. El resultado será el segundo término del cociente.

Quinto, se continúa el proceso hasta que el residuo tenga un grado menor que el grado del divisor.

EJEMPLO

El área de un rectángulo es $6a^4 + 5a^3 - 1$. Si su altura es $2a^2 + a - 1$, determina la base del rectángulo.



Se despeja la base en la fórmula del área del rectángulo:

Área = base · altura, entonces, base = area ÷ altura.

Es decir, base = $(6a^4 + 5a^3 - 1) \div (2a^2 + a - 1)$.

Se realiza la división de la siguiente manera:

Primero, se ordenan los polinomios en forma descendente con respecto a a.

Segundo, se divide $6a^4$ entre $2a^2$, $6a^4 \div 2a^2 = 3a^2$. El resultado será el primer término del cociente.

$$\begin{array}{l|l} 6a^4 + 5a^3 + 0a^2 + 0a - 1 & 2a^2 + a - 1 \\ \hline & 3a^2 \end{array}$$

Tercero, se multiplica $3a^2$ por cada uno de los términos del divisor. El resultado se resta del dividendo.

$$\begin{array}{rl|l} 6a^4 + 5a^3 + 0a^2 + 0a - 1 & & 2a^2 + a - 1 \\ \underline{-6a^4 - 3a^3 + 3a^2} & & \hline \\ 2a^3 + 3a^2 & & 3a^2 \end{array}$$

Cuarto, se baja el término $0a$ del dividendo y se divide $2a^3$ entre $2a^2$, $2a^3 \div 2a^2 = a$, a es el segundo término del cociente.

$$\begin{array}{rl|l} 6a^4 + 5a^3 + 0a^2 + 0a - 1 & & 2a^2 + a - 1 \\ \underline{-6a^4 - 3a^3 + 3a^2} & & \hline \\ 2a^3 + 3a^2 + 0a & & 3a^2 + a \end{array}$$

Quinto, se multiplica a por cada uno de los términos del divisor. El resultado se resta del dividendo.

$$\begin{array}{rl|l} 6a^4 + 5a^3 + 0a^2 + 0a - 1 & & 2a^2 + a - 1 \\ \underline{-6a^4 - 3a^3 + 3a^2} & & \hline \\ 2a^3 + 3a^2 + 0a & & 3a^2 + a \\ \underline{-2a^3 - a^2 + a} & & \\ 2a^2 + a & & \end{array}$$

Sexto, se baja el término -1 del dividendo y se divide $2a^2$ entre $2a^2$, $2a^2 \div 2a^2 = 1$, 1 es el tercer término del cociente y se procede como en los pasos 3 y 5.

$$\begin{array}{rl|l} 6a^4 + 5a^3 + 0a^2 + 0a - 1 & & 2a^2 + a - 1 \\ \underline{-6a^4 - 3a^3 + 3a^2} & & \hline \\ 2a^3 + 3a^2 + 0a & & 3a^2 + a + 1 \\ \underline{-2a^3 - a^2 + a} & & \\ 2a^2 + a - 1 & & \\ \underline{-2a^2 - a + 1} & & \\ 0 & & \end{array}$$

La base del rectángulo se expresa como $3a^2 + a + 1$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

135. **Comprueba si la siguiente división es correcta. Explica tu razonamiento.**

$(20x^3 - 18x^2 + 4) \div (4x - 2) = 5x^2 - 2x - 1$ y residuo $= 2$

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa.

136. Para dividir dos polinomios, deben estar ordenados en forma decreciente. ( )

137. El grado del polinomio residuo es mayor que el grado del polinomio divisor. ( )

138. Para comprobar si una división entre polinomios es correcta, solo se debe multiplicar el cociente por el divisor. ( )

Escribe = o ≠ según corresponda.

139. $(16x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$
$\square$ $(8x - 2)(2x + 1) + 3$

140. $(14p^2 - p + 3) \div (p + 1)$
$\square$ $(14p - 15) + 18$

141. $(50y^5 - 15y^4 + 5y) \div (5y^2 - 5y)$
$\square$ $(10y^3 + 7)\ (5y^2)$

142. $(-34m^6 - m^5 - m^3 - 2m) \div (-2m^3 - m^2)$
$\square$ $-17m^3$

Realiza las divisiones entre polinomios.

143. $(4x^3 - 2x^2 + 2x - 1) \div (2x + 1)$

144. $(6x^3 - 25x^2 + 3x - 5) \div (3x^2 - 5x + 2)$

145. $(a^3 + a + 2a^2 - 1) \div (a - 1)$

146. $(a^4 - 6a^3 + 2a^2 + 3a - 4) \div (a^2 - a + 2)$

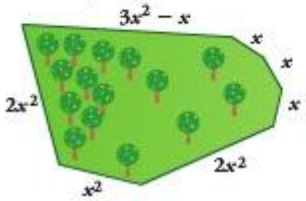
147. $(2y^4 - 3y^3 - 3y^2 + 4y - 55) \div (y - 3)$

148. $(-8y^3 + 3 - y + 6y^4 + 4y^5 + y^2) \div (2y + 1)$

149. $(6y + 9y^3 - 5y^4 - 8 + 6y^5) \div (2y - 1)$

Resuelve.

Camilo compra $24x^4 + 14x^3 + 10x^2 + 2x + 15$ metros de alambre para cercar su terreno.



150. Halla la expresión que indica con cuántas vueltas Camilo cerca el terreno si le sobran 15 metros.

Resuelve.

El ciclista de la fotografía recorre una distancia d que corresponde a $2x^3 - 4x - 2$ llevando una velocidad constante v que se puede expresar mediante $2x + 2$.



151. Escribe una expresión que permita establecer el tiempo que tardó el ciclista en recorrer d, teniendo en cuenta que

velocidad constante = distancia ÷ tiempo.

152. Determina la altura del cono, de acuerdo con los datos dados.



$\frac{1}{3}\pi r^2 = 2t^3 + 3t^2 + 5t$

Volumen: $8t^4 + 14t^3 + 23t^2 + 5t$

Responde.

153. El polinomio $30m^3n^2 - 45m^2n^4$ tiene tres factores. Si dos de ellos son $3m$ y $-5mn$, ¿cuál es el tercer factor?

154. ¿Por cuánto hay que multiplicar $(x - 3)$ para obtener $(x^3 - x^2 - 7x + 3)$?

Halla el cociente de las divisiones entre polinomios con coeficientes racionales.

155. $\frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + 4a + \frac{5}{3}$ entre $a + \frac{1}{2}$

156. $\frac{3}{5}m^2 + \frac{7}{10}mn - \frac{1}{3}n^2$ entre $m - \frac{2}{5}n$

157. $\frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{8}x^2y + \frac{3}{2}xy^2$ entre $\frac{1}{6}x - \frac{3}{2}y$

Escribe un ejemplo o un contraejemplo para cada afirmación.

158. Un polinomio dividido entre su opuesto da como cociente -1.

159. El grado del residuo debe ser menor que el grado del divisor.

División sintética o regla de Ruffini

Ampliación multimedia · Recurso imprimible · Actividad

La **división sintética** o **regla de Ruffini** es un algoritmo que permite hallar el cociente de la división entre un polinomio en la variable x y un binomio de la forma $x \pm a$. A continuación se ilustra mediante un ejemplo este procedimiento para dividir.

EJEMPLOS

1. Dividir $a^4 + 6a^3 - 8a - 16$ entre $a + 2$.

Primero, se escriben los coeficientes del polinomio dividendo en su forma ordenada. Como el polinomio no presenta término cuya parte literal es a^2, se escribe 0 como coeficiente.

1	6	0	−8	−16

Segundo, al lado de dichos coeficientes, se escribe el término independiente del binomio divisor $a + 2$, con signo contrario (-2).

1	6	0	−8	−16	−2

Tercero, se baja el primer coeficiente del dividendo (1) y luego, se multiplica por el valor presente en el divisor (-2). El producto (-2), se escribe debajo del segundo coeficiente del dividendo (6), y se realiza la operación respectiva.

1	6	0	−8	−16	−2
	−2				
1	4				

Cuarto, el resultado de la operación (4) se multiplica nuevamente por el valor presente en el divisor (-2). El producto (-8), se escribe debajo del tercer coeficiente del dividendo (0), y se realiza la respectiva suma o resta.

1	6	0	−8	−16	−2
	−2	−8			
1	4	−8			

Quinto, se continúa el proceso hasta llegar al término independiente del polinomio dividendo.

1	6	0	−8	−16	−2
	−2	−8	16	−16	
1	4	−8	8	−32	

Finalmente, los cuatro primeros números de la parte inferior son los coeficientes del polinomio cociente, que es un grado menor al polinomio dividendo. El último resultado (-32) es el residuo de la división.

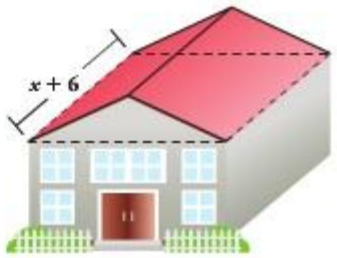
1	6	0	−8	−16	−2
	−2	−8	16	−16	
1	4	−8	8	−32	

Coeficientes del cociente — Residuo

Por tanto, en la división $(a^4 + 6a^3 - 8a - 16) \div (a + 2)$ se obtiene un polinomio de grado 3, es decir:

$a^4 + 6a^3 - 8a - 16 \div a + 2 = a^3 + 4a^2 - 8a + 8$.

2. El volumen del techo de una casa se puede expresar mediante el polinomio $2x^3 + 23x^2 + 78x + 72$. Hallar el polinomio que expresa el área de la base triangular del techo de la casa si se sabe que el largo se puede modelar mediante la expresión: $x + 6$.



Para hallar el área de la base triangular se tiene en cuenta que

Área de la base = volumen ÷ largo.

Luego, es necesario hacer la división

$(2x^3 + 23x^2 + 78x + 72) \div (x + 6)$.

Se elige la regla de Ruffini para realizar la división.

Se realiza la división mediante la regla de Ruffini.

2	23	78	72	−6
	−12	−66	−72	
2	11	12	0	

Luego, el área de la base triangular del techo de la casa se expresa mediante $2x^2 + 11x + 12$.

Historia de las matemáticas

Paolo Ruffini (1765-1822)

Matemático, filósofo y médico italiano, logró encontrar un algoritmo que permite encontrar los coeficientes de un polinomio cociente, el cual resulta de la división de un polinomio en x entre un binomio de la forma $x - a$.

Dicho algoritmo recibe el nombre de regla de Ruffini.



Recurso imprimible

Teorema del residuo

Enlace web

Para calcular el residuo de una división entre expresiones algebraicas, ha sido necesario hasta el momento, efectuar la respectiva división, ya sea por el algoritmo utilizado en la división de polinomios o mediante la regla de Ruffini.

Otra forma para hallar el residuo de una división donde el dividendo es un polinomio de la forma $P(x)$ y el divisor, un binomio de la forma $x \pm a$, es utilizando el teorema del residuo, el cual se enuncia a continuación.

El residuo de dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x - a$, se obtiene al sustituir x por a en $P(x)$. Es decir; $r = P(a)$.

EJEMPLOS

1. Hallar el residuo de cada división, sin efectuar la división.

a. $(2x^2 - 3x + 7) \div (x - 4)$

Para aplicar el teorema del residuo se calcula el valor numérico del polinomio.

$2x^2 - 3x + 7$ para $x = 4$

$2x^2 - 3x + 7 = 2 \times 4^2 - 3 \times 4 + 7 = 27$

Por tanto, el residuo de la división $(2x^2 - 3x + 7) \div (x - 4)$ es 27.

b. $\dfrac{(3x^2 - 5x + 3)}{(x - 2)}$.

Según el teorema del residuo basta evaluar el polinomio $3x^2 - 5x + 3$ para $x = 2$.

Se calcula entonces $3 \times 2^2 - 5 \times 2 + 3 = 5$.

Por tanto, el residuo de la división $\dfrac{(3x^2 - 5x + 3)}{(x - 2)}$ es 5.

2. Determinar si el polinomio $x^6 - 1$ es divisible entre $x + 1$.

Como $x + 1 = x - (-1)$, se calcula el valor numérico del polinomio $x^6 - 1$ para $x = -1$, $x^6 - 1 = (-1)^6 - 1 = 1 - 1 = 0$.

De acuerdo con el teorema del residuo, se obtiene que el residuo de la división es 0, de lo que se concluye que el polinomio $x^6 - 1$ es divisible entre $x + 1$.

3. Determinar el residuo de la división de $x^3 - 3x^2 + 4x + 2$ entre $3x - 1$.

En principio no se podría emplear el teorema del residuo ya que el divisor no es de la forma $x - a$. Sin embargo, si $P(x) = Q(x) \times (mx - a) + r$, por tanto, al multiplicar y dividir el término $Q(x) \times (mx - a)$ por m se tiene

$$P(x) = Q(x) \times m\left(x - \frac{a}{m}\right) + r$$

Entonces, r se puede calcular mediante el teorema del residuo pero con $\left(x - \frac{a}{m}\right)$ como divisor. En el caso que nos ocupa $\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

Se evalúa $\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{82}{27}$.

Luego, el residuo de $(x^3 - 3x^2 + 4x + 2) \div (3x - 1)$ es $\frac{82}{27}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Ejercito · Razono · Propongo

Subraya las divisiones que no se pueden realizar por división sintética.

160. $(3x^2y + 8x) \div (x + 2)$

161. $(4p^3 + 2p^2 + p + 2) \div (p - 1)$

162. $(5n^4 - n^3 + 4n) \div (4n^2 - 3)$

163. $(4x^2 - 9m^2n^4) \div (m - 2)$

164. $(8r^5 + 9r^4 + 9r^2) \div (r - 8)$

165. $\left(\frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{6}{7}z\right) \div \left(z - \frac{1}{4}\right)$

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

166. Al utilizar la división sintética, el cociente siempre es un grado menor que el polinomio divisor. ( )

167. Al dividir por el método de división sintética, el polinomio dividendo tiene que ser un polinomio completo en términos de una variable. ( )

168. El residuo en la división sintética siempre es un monomio. ( )

Realiza las siguientes divisiones mediante división sintética.

169. $(2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x - 18) \div (x + 3)$

170. $(3a - 4 - 5a^3 + a^4) \div (a + 2)$

171. $(20n^5 + 2n^3 + 3n - 8) \div (n - 1)$

172. $(w^4 + 4w - 5w^3 - 8) \div (w - 1)$

173. $(3z^4 - 10z^3 - z^2 - 20z + 5) \div (z - 4)$

174. $(8m - 22m^2 - 12 + m^4) \div (m - 2)$

175. Completa la tabla.

Dividendo	Divisor	Tipo de división
$k^3 - 3k^2 + k + 3$	$k - 4$	Inexacta
$x^2 + 4x + 3$	$x + 2$	
$y^3 + y^2 + 4y + 1$	$y + 3$	
$m^4 - m - 2m^3 - 12$	$m - 6$	
$3x^4 + 11x^3 - 18x + 8$	$x - 4$	

Encuentra el cociente y el residuo de dividir el polinomio $7x^2 + 6x + x^3 + 4$ entre cada uno de los siguientes binomios.

176. $x + 2$ **178.** $x + 5$ **180.** $x - 1$

177. $x - 6$ **179.** $x - 3$ **181.** $x - 2$

Relaciona cada trinomio de la izquierda con un binomio de la derecha, para que la división entre ellos sea exacta.

182. $m^2 - m - 90$ **a.** $m - 10$

183. $m^2 - 14m + 48$ **b.** $m - 3$

184. $m^2 + 14m + 49$ **c.** $m - 7$

185. $m^2 - 6m + 8$ **d.** $m - 2$

186. $m^2 - 6m - 7$ **e.** $m - 6$

187. $m^2 - 8m + 15$ **f.** $m + 7$

Calcula el valor de m para que la división sea exacta. Utiliza el método de Ruffini.

188. $(2x^3 + 9x^2 + 7x - m) \div (x + 2)$

189. $(x^4 + x^3 - 2x^2 + mx + 17) \div (x - 1)$

190. $(3x^4 - 11x^3 - 14x^2 - mx + 21) \div (x - 3)$

191. $(x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x + m) \div (x - 2)$

192. $(x^3 - mx^2 - 2mx + 3) \div (x - 3)$

Marca con una ✗ cuál de los dos binomios es factor del polinomio dado.

193. $a^3 + a^2 - a - 1$

☐ $(a - 2)$ ☐ $(a + 1)$

194. $2a^5 - 8a^4 + 3a - 12$

☐ $(a - 4)$ ☐ $(a + 4)$

195. $2a^3 - a^2 - 18a + 9$

☐ $(a - 3)$ ☐ $(a - 4)$

196. $a^3 - 3a^2 - 4a + 12$

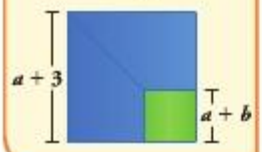
☐ $(a + 2)$ ☐ $(a + 3)$

Resuelve.

197. Mariana dividió un polinomio entre un binomio de grado uno y obtuvo como cociente el polinomio $x^3 + 5x^2 + 1 + x$. ¿Cuáles pueden ser el polinomio dividendo y el binomio divisor? Comprueba tu respuesta.

Matemáticamente

¿Cómo se puede expresar el área de la región verde?



3. Operaciones combinadas entre polinomios

Actividades

Para realizar operaciones combinadas entre polinomios se debe considerar el orden de las operaciones y los signos de agrupación. Se recomienda suprimir los signos de agrupación, resolviendo las operaciones indicadas dentro de cada uno de ellos.

Una vez suprimidos los signos de agrupación se resuelven las divisiones y multiplicaciones de izquierda a derecha y, por último, las sumas y restas en el orden en que aparezcan, de tal forma que la expresión inicial queda simplificada.

EJEMPLOS

1. Resolver la siguiente expresión.

$(8x^3 + 5x^2) \times [(7x^2 - 4x) - (x^2 + x)]$

Primero, se eliminan los paréntesis.

$(8x^3 + 5x^2) \times [(7x^2 - 4x) - (x^2 + x)] = (8x^3 + 5x^2) \times [7x^2 - 4x - x^2 - x]$

Después, se reducen los términos semejantes.

$(8x^3 + 5x^2) \times [6x^2 - 5x]$

Luego, se realiza la multiplicación y se reducen términos semejantes.

$48x^5 - 40x^4 + 30x^4 - 25x^3 = 48x^5 - 10x^4 - 25x^3$.

2. Escribir una expresión que permita calcular las áreas sombreadas de la figura 3.

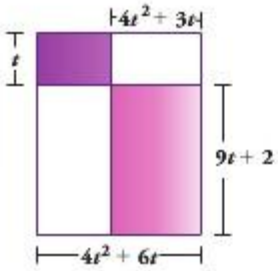


Figura 3.

Una forma de resolver la situación se describe a continuación:

Primero, se plantean las expresiones para calcular las áreas morada y rosada así:

$A_{\text{morada}} = t[(4t^2 + 6t) - (4t^2 + 3t)]$

$A_{\text{rosada}} = (4t^2 + 3t)(9t + 2)$

Luego, se resuelve cada una de las expresiones.

$A_{\text{morada}} = t[(4t^2 + 6t) - (4t^2 + 3t)]$

$= t[4t^2 + 6t - 4t^2 - 3t]$ Se eliminan los paréntesis.

$= t[3t] = 3t^2$ Se reducen los términos semejantes. Se realiza la multiplicación.

$A_{\text{rosada}} = (4t^2 + 3t)(9t + 2)$

$= 36t^3 + 8t^2 + 27t^2 + 6t$ Se realiza la multiplicación.

$= 36t^3 + 35t^2 + 6t$ Se reducen los términos semejantes.

Finalmente, se suman las áreas coloreadas.

$A_{\text{coloreada}} = A_{\text{morada}} + A_{\text{rosada}}$

$= 3t^2 + 36t^3 + 35t^2 + 6t$

$= 36t^3 + 38t^2 + 6t$

Entonces, el área sombreada de la figura se expresa mediante $36t^3 + 38t^2 + 6t$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Escribe una operación entre polinomios con signos de agrupación, de acuerdo con las condiciones dadas. Luego resuélvelas.

198. Que incluya suma, resta y multiplicación.

199. Que incluya suma, multiplicación y división.

Teniendo en cuenta que $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios, escribe V, si la expresión es verdadera y F, si no lo es.

200. $(p(x) + q(x)) \times r(x) = p(x) + q(x) \times r(x)$ ( )

201. $p(x) \div q(x) \times r(x) = (p(x) \div q(x)) \times r(x)$ ( )

202. $(p(x) \times q(x)) - r(x) = p(x) \times (q(x) - r(x))$ ( )

Calcula las operaciones teniendo en cuenta los siguientes polinomios.

$m(x) = 3x^2 + 4x - 3$

$n(x) = 5x^5 + 3x^2 + 2$

$q(x) = -4x^3 - 2x^2 + 5x$

$p(x) = -3x^3 - 7x^2 + x - 1$

203. $m(x) - (q(x) \times n(x)) - p(x)$

204. $p(x) + (q(x) \times n(x)) - p(x)$

205. $m(x) + (q(x) \times n(x)) - p(x)$

206. $n(x) + q(x) - p(x) + m(x)$

207. $q(x) - [(m(x) + n(x)) - p(x)]$

208. $n(x) - [(p(x) + n(x)) \times (m(x) \times q(x))]$

Plantea un polinomio para resolver la siguiente situación.

209. Las siguientes fotografías muestran un tanque y un balde de forma cilíndrica, en ellas se muestran las medidas de sus alturas y el área de sus bases. Halla una expresión que determine la cantidad de veces que es necesario vaciar el balde en el tanque para llenarlo de agua.

Área de la base
$x^2 - 3xy + y^2$



Área de la base
$2x^2 + 5xy + 6y^2$



Plantea las operaciones. Luego, resuélvelas.

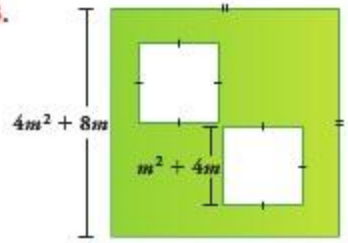
210. La suma de $xy^2 + x^3y^4 - x^2$ con el producto entre $5x^3y^4 + 3x$ y $2x^3 - 4x^2 + 3x$

211. Al producto de $9x^3 + 6x^2 + 7$ y $3x^2$ restar la diferencia entre $\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ y $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^3$.

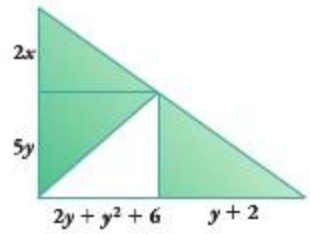
212. Suma el producto entre $\frac{2}{3}x^2 - 4x^3$ y $x^5 + x^3$ a la división entre $7x^2 + 25x - 12$ y $x + 4$.

Escribe una expresión que permita calcular el área sombreada de cada una de las siguientes figuras.

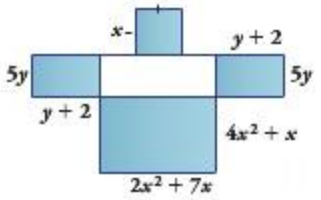
213.



214.



215.



216. **Si la expresión que determina la arista de cada cubo que conforma el siguiente cuerpo se obtiene de dividir $x^2 - 10x + 25$ entre $x - 5$, ¿cuál es el volumen del cuerpo geométrico?**



EJERCICIOS PARA REPASAR

Operaciones aditivas entre polinomios

Realiza las operaciones de los siguientes monomios y polinomios.

217. $(x - 2y) + (3x - y)$

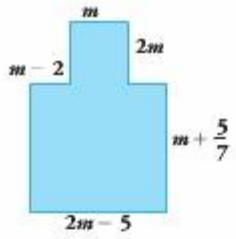
218. $(-x^2y + 8xy - xy^2) - (5xy^2 + x^2y) + 7xy$

219. $(4a^2 - 6a + 7) + (6a - 23 - 9a^2)$

220. $(x - y + z) - (2x - 3y^2 - z) + (x^2 + y^2 + z^2)$

221. $\left(-\frac{2}{3}m^2n + 3mn^2\right) - \left(\frac{3}{7}m^2n + \frac{7}{5}mn^2\right) - m^2n$

222. Determina el perímetro de la siguiente figura.



Encuentra el polinomio que falta en cada operación.

223. $(8x^3 + 4x^2 - 5) + \square = -2x^3 + 5x^2 + 2$

224. $(7m - 3n + 1) + \square = 8n - 8$

225. $(-3a^2b + 4b - 5a) - \square = 11a^2b - 6a + 4b$

Escribe la expresión y resuelve la operación.

226. El resultado de sumar $-7ab^3 - 3b^2 + 2a - 18$ con otro polinomio es $-3ab^3 + 5b^2 - 7a - 4$.

227. La suma de tres números consecutivos x, $x + 1$ y $x + 2$ es un número múltiplo de 3.

Operaciones multiplicativas entre polinomios

Realiza las siguientes multiplicaciones.

228. $(x + 3)(x + 5)$

229. $(2x - 5)(x + 4)$

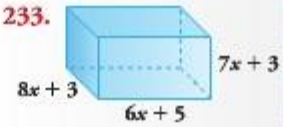
230. $\left(\frac{6}{5}x^2 - 2xy + \frac{7}{4}y^2\right)(2x^2 + 3y^2)$

231. $(a + b + c)(a - 2b - c)$

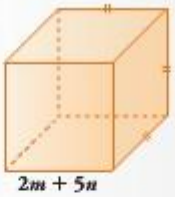
232. $\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{5}x - 5\right)\left(\frac{7}{3}x^2 - 6x + 2\right)$

Calcula el volumen de los siguientes sólidos.

233.

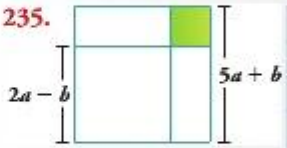


234.

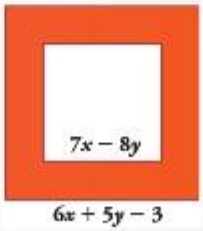


Calcula el área de la región sombreada.

235.



236.



Realiza las siguientes divisiones.

237. $(12x^3 - 2x^2 - 3x + 28) \div (3x + 4)$

238. $(8x^3 - 5x^2 + x) \div (2x - 1)$

239. $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{4}x - 2\right) \div (x^2 + x + 1)$

Realiza las siguientes divisiones utilizando división sintética.

240. $(2x^4 - x - 4) \div (x - 1)$

241. $(x^7 + 128) \div (x + 2)$

242. $(4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$

Determina el residuo de las siguientes divisiones sin realizarlas.

243. $(-x^2 + x + 1) \div (x + 3)$

244. $(x^3 + 2x^2 - x + 1) \div (x - 2)$

245. Halla el valor de m para que el polinomio $P(x) = x^3 - 7x^2 + mx - 20$ sea divisible entre $x - 2$.

Operaciones combinadas entre polinomios

Resuelve cada expresión.

246. $[(2m + n)(3m - 2n)] - (4m^2 - 3mn)$

247. $\left(\frac{1}{2}x^4 - 5x^3\right) \times [(7x^5 - 4x) - (x^3 + x) \div (x^2 + 1)]$

Considera las siguientes expresiones:

$L = x + y + y^2$ $\quad P = x^2 + 7yx$

$M = 3x - 2y$ $\quad Q = -y^3 - 2xy - y$

$N = 5xy - y$ $\quad R = 5xy^{-1} - y$

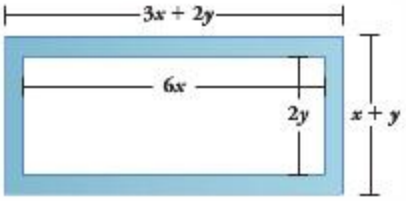
Calcula las siguientes operaciones y reduce las expresiones resultantes.

248. $-M(N - L) + Q$

249. $QL - (-MN + P)$

250. $-L - (P - (M + N - Q))$

Observa la siguiente figura. Luego, responde.



251. ¿Cuál es el polinomio que representa la región azul?

252. ¿Cuál es el valor de la región si $x = 3$ y $y = 1$?

PROBLEMAS PARA REPASAR

En un bus viajan niños y adultos. Además, se sabe lo siguiente:

- En el primer paradero, sube el triple del número de niños y la mitad del número de adultos que hay en el bus.
- En el segundo paradero, baja la mitad del número de niños más 3 y sube el doble el número de adultos que hay, menos 6.
- En el tercer paradero, sube el doble del número de niños y baja la tercera parte del número de adultos que hay.

¿Cuál es la expresión algebraica que indica el número de niños y adultos que hay en el bus después de pasar el tercer paradero?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Cuál es la expresión algebraica que indica el número de niños y adultos que hay en el bus después de pasar el tercer paradero?

¿Cuáles son los datos del problema?

En un bus viajan niños y adultos y el número de niños y adultos que sube y baja en cada paradero.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se asigna una variable a cada cantidad desconocida.

x: cantidad de niños al comienzo del viaje en el bus. y: cantidad de adultos al comienzo del viaje en el bus.

Segundo, se organiza la información en una tabla.

	Número de niños	Número de adultos	Total de personas
Inicio	x	y	$x + y$
Primer paradero	$x + 3x = 4x$	$y + \frac{y}{2} = \frac{3}{2}y$	$4x + \frac{3}{2}y$
Segundo paradero	$4x - \left(\frac{4x}{2} + 3\right) = 2x - 3$	$\frac{3}{2}y + \left(2 \cdot \frac{3}{2}y - 6\right) = \frac{9}{2}y - 6$	$2x + \frac{9}{2}y - 9$
Tercer paradero	$2x - 3 + 2(2x - 3) = 6x - 9$	$\frac{9}{2}y - 6 - \left(\frac{\frac{9y}{2} - 6}{3}\right) = 3y - 4$	$6x + 3y - 13$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones y las expresiones son correctas. Luego, se tiene que la expresión que indica la cantidad de niños y adultos que hay en el bus después de pasar el tercer paradero es $6x + 3y - 13$.

Carlos compró una bicicleta y un casco. Recibió un descuento correspondiente a la cuarta y tercera partes de sus precios originales.

253. ¿Qué polinomio representa lo que tuvo que pagar en total Carlos? _____

Resuelve las preguntas 254 y 255 de acuerdo con la siguiente información.

Una empresa paga a sus empleados $50.000 por cada hora de trabajo en el horario habitual y $75.000 por cada hora extra de trabajo.

254. Asigna una variable para el número de horas de trabajo en horario habitual y otra para el número de horas extras.

_____

_____

255. Determina la expresión que utiliza la empresa para calcular lo que debe pagar a un empleado en un mes.

Resuelve las actividades 256 y 257 de acuerdo con la siguiente información.

La siguiente tabla muestra dos polinomios que permiten calcular la distancia en función del tiempo de un automóvil azul y otro verde en un tiempo determinado (t).

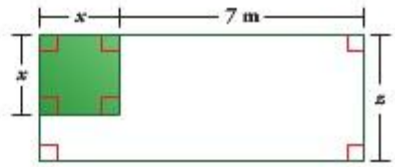
Automóvil	Distancia
Azul	$8t^2 + 6t$
Verde	$5t^2 + 9t$

256. Determina el automóvil que recorre la mayor distancia en 2 horas.

_____

257. Escribe un polinomio que represente la distancia que habrá entre los carros, si los dos parten al mismo tiempo y del mismo lugar uno hacia el norte y el otro hacia el sur.

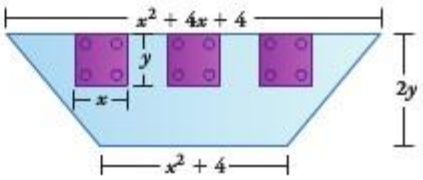
En una sala rectangular se ha colocado una alfombra verde cuadrada como se muestra en la figura.



258. Expresa algebraicamente el perímetro de la región de la sala que no está alfombrada.

_____

En un garaje se pueden parquear tres carros iguales como se muestra en el siguiente plano:



259. ¿Qué polinomio representa el área que no está ocupada por los carros?

_____

Resuelve las preguntas 260 a 262 de acuerdo con la siguiente información.

En una fábrica de ladrillos los operarios almacenan los ladrillos en montones que tienen de ancho $10x + 6$ ladrillos, de largo $10y + 2$ y de altura $10z + 1$ ladrillos.

Expresa algebraicamente lo siguiente:

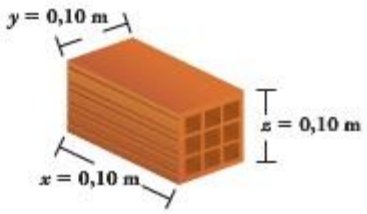
260. ¿Cuántos ladrillos tiene la base de un montón?

_____

261. ¿Cuántos ladrillos tiene un montón?

_____

262. Si las medidas de un ladrillo son las que se muestran, ¿cuál es el volumen de un montón?



_____

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para calcular la fuerza que se ejerce entre las partículas debido a su carga eléctrica.

La **electrostática** es una rama de la física que estudia las cargas eléctricas y la fuerza que se ejerce entre ellas cuando están en reposo.

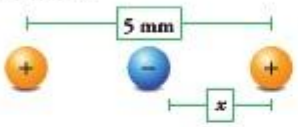
Existen cargas positivas y negativas. Cuando se encuentran dos cargas del mismo signo tienden a separarse, mientras que si las cargas son de signos opuestos se atraen mutuamente.

La fuerza con la que se atraen o se separan dos cargas eléctricas depende del medio en el que se encuentren y de la distancia que las separa, y está dada por la expresión:

$$\text{fuerza} = \frac{c}{d^2}$$

Donde c es una constante que depende de la carga eléctrica de cada partícula y del medio donde se encuentren y d es la distancia a la cual se encuentran las dos partículas.

Sin embargo, en un sistema eléctrico no solo actúan dos partículas cargadas, sino que pueden actuar muchas partículas cargadas. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestran dos partículas positivas separadas 5 mm, que actúan sobre una partícula negativa que se encuentra en un punto intermedio.



Para hallar la fuerza resultante en este caso, se le resta a la fuerza que ejercen las dos partículas positivas, la fuerza que ejerce una de las partículas positivas con la partícula negativa.

$$\text{fuerza resultante} = \frac{c}{(5-x)^2} - \frac{c}{x^2}$$

Así, al resolver la resta entre las fracciones se obtiene que:

$$\text{fuerza resultante} = \frac{cx^2 - c(5-x)^2}{x^2(5-x)^2}$$

Luego, se resuelve la potencia $(5-x)^2$ del numerador, multiplicando $(5-x)$ por $(5-x)$.

$$\text{fuerza resultante} = \frac{cx^2 - 25c + 10cx - cx^2}{x^2(5-x)^2}$$

Finalmente, se reducen términos semejantes.

$$\text{fuerza resultante} = \frac{10cx - 25c}{x^2(5-x)^2}$$

Por tanto, en este caso la fuerza eléctrica resultante también depende de las distancias que separan las partículas cargadas.

Calcular la fuerza eléctrica es indispensable para controlar el buen funcionamiento de los aparatos eléctricos. Por ejemplo, en una fotocopiadora, la luz que barre el documento se proyecta sobre un tambor que se carga eléctricamente. Posteriormente, el tóner o tinta se adhiere gracias a la fuerza eléctrica que ejercen las partículas cargadas eléctricamente con la luz. Por tanto, si la fuerza eléctrica no es suficiente, las partículas no se adhieren correctamente al papel y la fotocopia es de baja calidad.



1. **Una partícula con carga negativa se encuentra entre dos partículas con carga positiva. Halla la fuerza resultante si la distancia entre las partículas positivas es:**

   a. 20 mm **b.** 0,5 mm

2. **Cuando una partícula negativa se encuentra entre dos partículas de signos opuestos, entonces la fuerza resultante se halla sumando las fuerzas. Calcula la fuerza resultante en este caso si la distancia entre las partículas es 18,5 mm.**

3. **Consulta otras aplicaciones de la electrostática. Luego, compártelas con tus compañeros de clase.**

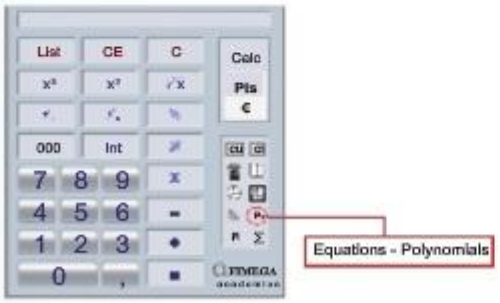
Trabaja con Ofi Calc

Objetivo: utilizar la división sintética o regla de Ruffini para dividir un polinomio de coeficientes enteros hasta grado 3 entre un binomio de la forma $x - a$.

Descripción: dividir polinomios utilizando las herramientas de Ofi Calc. Luego, identificar el cociente y el residuo de la división.

Para acceder Ofi Calc, ingresa y descarga el programa en: oficalc.softonic.com

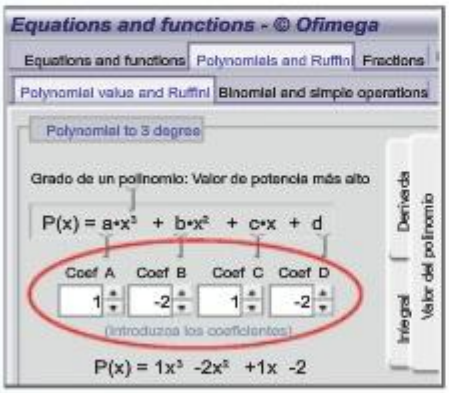
1. Activa la opción **Equations-Polynomials** y se abrirá una nueva ventana.



2. Selecciona la pestaña **Polynomials and Ruffini.**



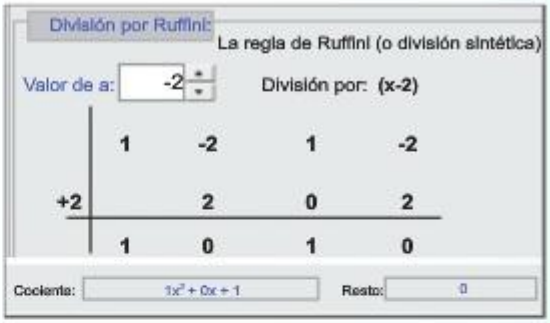
3. En la parte superior izquierda de la ventana **Polynomials and Ruffini,** haz clic en cada uno de los *scrollbar* hacia arriba o hacia abajo, para ingresar los coeficientes enteros del polinomio dividendo: $x^3 - 2x^2 + x - 2$.



4. Haz clic en el *scrollbar* hacia arriba o hacia abajo en el espacio llamado **Valor de la variable *x***, para ingresar el número opuesto al término independiente del polinomio divisor que en este caso es 2, que corresponde al binomio $(x - 2)$.



5. Finalmente, en el campo **División por Ruffini** de la ventana inicial, se muestra la división sintética en la parte derecha. Además, en la parte izquierda se muestra el **Cociente** y el residuo o **Resto** de la división sintética.



6. Utiliza Ofi Calc para realizar las divisiones usando la regla de Ruffini. Luego, identifica para qué valor numérico de cada polinomio el residuo es igual a cero.

   a. $(x^2 + 5x - 14) \div (x + 1)$

   b. $(5x^3 - 6x^2 - 4x - 8) \div (x - 4)$

   c. $(2x^3 + 5x^2 + 10x - 8) \div (x + 3)$

   d. $(x^3 - 1) \div (x - 1)$

   e. $x^2 + 7x + 4 \div x - 2$



4 Productos notables y cocientes notables

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer y aplicar los **productos notables** en multiplicaciones entre polinomios.
- Comprender cómo se obtiene y cómo se aplica **el triángulo de Pascal** en el desarrollo de binomios.
- Aplicar los **cocientes notables** en la simplificación de fracciones.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Por competencias

4	Multimedia	1	Audio
1	Galería	8	Imprimibles
4	Actividades	1	Enlace web

Lo que sabes...

1. Realiza las siguientes operaciones entre monomios.

   a. $4a^3 + 6a^3$

   b. $4 \cdot (-3x^2y^3)$

   c. $2y - 5y - y$

   d. $(-x)(-5x^3)(-3x^2)$

   e. $(-72xy^5z) \div (-8y^3z)$

   f. $\dfrac{-15x^4y^4z^5}{3x^2yz^3}$

2. Calcula las siguientes potencias.

   a. $(3m^2)^3$

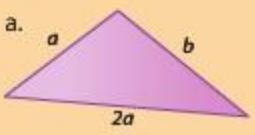
   b. $(-4y^3)^2$

   c. $(-2x^2y^4z)^3$

   d. $\left(\frac{2}{5}p^2q\right)^4$

3. Encuentra una expresión algebraica para escribir el perímetro de cada figura.

   a.

   b.



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para saber calcular la cuota de un préstamo bancario.

Cuando una persona desea comprar una casa, un negocio, un apartamento o un carro, en ocasiones, hace una solicitud de préstamo a un banco y, al salir aprobada, el solicitante debe empezar a cancelar cuotas mensuales durante el tiempo límite de plazo para pagar el préstamo.

Las expresiones algebraicas son útiles para encontrar el valor de cada cuota del préstamo incluyendo el interés que cobra el banco durante el período de pago.

:: Lee más acerca de este tema en la página 104.

Cronología de los productos y los cocientes notables

Persia. Abu Bakr Al-Karaji sustituye operaciones geométricas del álgebra por operaciones aritméticas modernas y define los monomios $x, x^2, x^3, \ldots$ y $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots$ y da las reglas para los productos entre ellos.

900 d. C.

1654

Francia. Blaise Pascal expresa en forma de triángulo los coeficientes binomiales para cualquier exponente en su libro *Traité du triangle arithmétique*.



1687

Inglaterra. Isaac Newton idea la forma de expresar cualquier binomio de n potencia usando una serie infinita de números combinatorios.



1807

Francia. Paolo Ruffini publica su libro *Algebra elementare* donde expresa polinomios en forma de productos y cocientes notables.

1820

Francia. Augustin Cauchy encuentra la manera para expresar binomios cúbicos de la forma $a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

1821

Francia. Jean Robert Argand propone una identidad para expresar el producto de dos trinomios de la forma $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

1930

Austria. Kurt Gödel crea los números de Gödel que se expresan como productos de potencias de números primos.



1. Productos notables

Los **productos notables** son expresiones algebraicas que resultan de generalizar ciertos casos de multiplicación de polinomios.

1.1 Cuadrado de un binomio

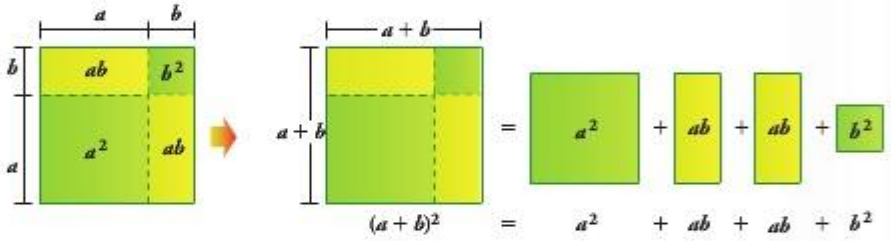
Recurso imprimible · Ampliación multimedia

Cuando se halla el cuadrado de un binomio se deben tener en cuenta dos casos: el cuadrado de la suma de dos términos y el cuadrado de la diferencia de dos términos.

El **cuadrado de la suma de dos términos** es igual al cuadrado del primer término, más el doble del producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

:: Se puede comprobar este producto notable, descomponiendo el área de un cuadrado de lado $a + b$.



:: También se puede comprobar el producto notable realizando la multiplicación así:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) && \text{Se aplica la definición de potenciación } a^2 = a \cdot a.\\ &= a(a + b) + b(a + b) && \text{Se aplica la propiedad distributiva.}\\ &= a^2 + ab + ab + b^2 && \text{Se aplica la propiedad distributiva.}\\ &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{Se reducen términos semejantes.}\end{aligned}$$

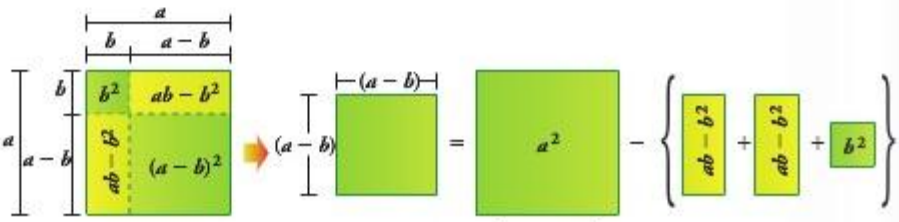
Matemáticamente

¿Cómo se puede comprobar el cuadrado de la diferencia de dos términos, realizando multiplicaciones?

El **cuadrado de la diferencia de dos términos** es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término:

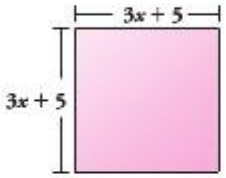
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

:: El cuadrado de la diferencia de dos términos se puede comprobar hallando el área de un cuadrado de lado $a - b$ mediante la descomposición de las áreas de un cuadrado así:



EJEMPLOS

1. Hallar el área que se ilustra en el cuadrado de la figura:



Como el área de un cuadrado es $A = l \times l = l^2$ y en este caso $l = 3x + 5$, entonces se calcula $(3x + 5)^2$, para ello se aplica el producto notable de un binomio al cuadrado.

En este caso el primer término es $3x$ y el segundo término es 5.

Primero, se aplica el producto del cuadrado de la suma de un binomio.

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 5 + 5^2$$

Segundo, se desarrollan las potencias en el resultado anterior.

$$9x^2 + 30x + 25.$$

Finalmente, se tiene que el área del cuadrado de la figura es $9x^2 + 30x + 25$.

2. Calcular el resultado de la expresión 101^2 aplicando el cuadrado de la suma de dos términos.

$101^2 = (100 + 1)^2$ Se descompone 101 en dos sumandos.

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2$ Se aplica el cuadrado de la suma de dos términos.

$= 10.000 + 200 + 1 = 10.201$ Se realizan operaciones.

Así, $101^2 = 10.201$

3. Calcular el valor de $a + b$, teniendo en cuenta que $a^2 + b^2 = 58$ y $ab = 21$.

Se utiliza el cuadrado de la suma de un binomio.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ Se aplica la propiedad conmutativa.

$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$ Se agrupan términos.

$(a + b)^2 = 58 + 2(21)$ Se remplazan los valores.

$(a + b)^2 = 100$ Se realizan operaciones.

$(a + b)^2 = 10^2$ Se expresa 100 como potencia de 10.

Luego, se tiene que $(a + b)^2 = 10^2 \longrightarrow a + b = 10$ o $a + b = -10$.

4. Resolver las expresiones usando productos notables.

a. $(3m + 2)^2$

Primero, se aplica el cuadrado de la suma de dos términos.

$$(3m + 2)^2 = (3m)^2 + 2(3m)(2) + 2^2$$

Luego, se aplican las propiedades de la potenciación y se realizan operaciones.

$$9m^2 + 2(3m)(2) + 2^2 = 9m^2 + 12m + 4$$

Entonces, $(3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4$

b. $(6x - y^2)^2$

Primero, se aplica el cuadrado de la diferencia de dos términos.

$$(6x - y^2)^2 = (6x)^2 - 2(6x)(y^2) + (y^2)^2$$

Luego, se aplican las propiedades de la potenciación y se realizan operaciones.

$$6^2x^2 - 2(6x)(y^2) + y^4 = 36x^2 - 12xy^2 + y^4$$

Entonces, $(6x - y^2)^2 = 36x^2 - 12xy^2 + y^4$

c. $\left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}\right)^2$

Primero, se aplica el cuadrado de la diferencia de dos términos.

$$\left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a^3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}a^3\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Luego, se aplican las propiedades de la potenciación y se realizan operaciones.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2(a^3)^2 - 2\left(\frac{1}{2}a^3\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}a^6 - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{9}$$

Así, $\left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}a^6 - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{9}$

d. $(x^n - y^{n+1})^2$

Primero, se aplica la regla del cuadrado de la diferencia de dos términos.

$$(x^n - y^{n+1})^2 = (x^n)^2 - 2(x^n)(y^{n+1}) + (y^{n+1})^2$$

Luego, se aplican las propiedades de la potenciación y se realizan operaciones.

$$x^{2n} - 2(x^n)(y^{n+1}) + y^{2(n+1)} = x^{2n} - 2x^ny^{n+1} + y^{2n+2}$$

Así, $(x^n - y^{n+1})^2 = x^{2n} - 2x^ny^{n+1} + y^{2n+2}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Modelo · Razono · Propongo · Soluciono problemas

Utiliza la multiplicación y el producto notable para hallar el resultado de cada expresión.

1. $(4 + x)^2$
2. $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b\right)^2$
3. $(9m + n)^2$
4. $(12x^2 + y)^2$

5. Completa la tabla. Para ello utiliza los productos notables.

Monomio	Monomio al cuadrado
x^2	
$5m^2$	
$-3m^3n$	
$7x^2y^2$	
$\frac{w^2z^3}{t^2}$	
$\frac{1}{5}p^4qr^2$	
$-\frac{3}{5}m^2nr^4$	

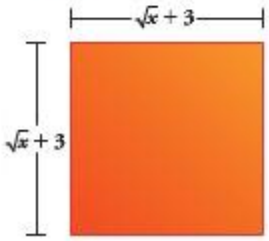
Monomio	Monomio al cuadrado
$\frac{rs^3t}{-5}$	
$\frac{15a^2b^3}{c}$	
$\frac{4}{3}m^2n$	
$12ny^3$	
$2w^2z^3t^4$	
$-6n^2p^2$	
$\frac{4}{7}wp^4q^3$	

Resuelve los siguientes productos notables.

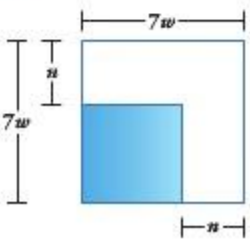
6. $(2x + y)^2$
7. $(mn + 2)^2$
8. $(7x^3y + 4)^2$
9. $(9xy + 2x)^2$
10. $\left(\frac{1}{2}x^2 + y^2\right)^2$
11. $\left(\frac{4}{3}m^2y^3 + \frac{7}{3}x^2mn\right)^2$
12. $(3xy^3 - 5)^2$
13. $(4wz^2 - 4w^2z)^2$
14. $(mn^4 - n)^2$
15. $(a^n - w)^2$
16. $\left(\frac{5}{7}p - \frac{1}{7}q\right)^2$
17. $\left(\frac{2}{5}xy - \frac{3}{4}x^{2n+1}\right)^2$

Halla el área de los cuadrados con color.

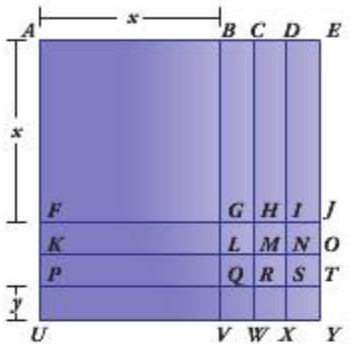
18.



19.



Observa el cuadrado *AEYU*. Luego, escribe el producto de cada una de las siguientes áreas.



20. *ACMK*
21. *GISQ*
22. *ADSP*
23. *AEYU*
24. *FJYU*
25. *AETP*

26. Dibuja un diagrama en el que representes el producto $(a + b + c)^2$.

Resuelve.

27. $(4m^n + y^n)^2$
28. $(3a^n + 2b^{n+1})^2$
29. $(5y^{m+1} - 2x^m)^2$
30. $\left(\frac{1}{5}m^{n+1} + m^{n+3}\right)^2$
31. $\left(\frac{1}{7}y^{2t+1} - \frac{1}{4}y^{t+2}\right)^2$
32. $\left(\frac{4}{9}n^n + r^m\right)^2$
33. $(2b - c^{x+2})^2$
34. $(3{,}2m^{2x+1} + m^{x+2})^2$
35. $\left(5\frac{1}{3}n^{2+x} - 7\frac{1}{2}m^{3+2x}\right)^2$

Una pelota es lanzada hacia arriba a una velocidad de 128 pies por segundo. La relación ente la altura h de la pelota sobre el piso, y el tiempo t en segundos después de haberla arrojado está dada por la expresión:

$$h(t) = -16(t - 4)^2 + 256 \text{ pies}$$

36. Simplifica esta expresión.
37. Determina la altura de la pelota, dos segundos después de ser lanzada.

1.2 Cuadrado de un trinomio

Recurso imprimible

El **cuadrado de un trinomio**, puede relacionarse con el cálculo del área de un cuadrado cuyo lado mida $a + b + c$, mediante la propiedad distributiva o aplicando el producto notable del cuadrado de un binomio.

El **cuadrado de la suma de tres términos** es igual al cuadrado del primer término, más el cuadrado del segundo término, más el cuadrado del tercer término, más el doble producto del primer término por el segundo término, más el doble producto del segundo término por el tercer término, más el doble producto del primer término por el tercer término:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Recuerda que...

$a - b - c = a + (-b) + (-c)$

$a - b - c = a - b + (-c)$

- Mediante el cálculo del área del cuadrado cuyo lado mide $a + b + c$, se suman las áreas de los cuadrados y rectángulos que lo conforman, así:

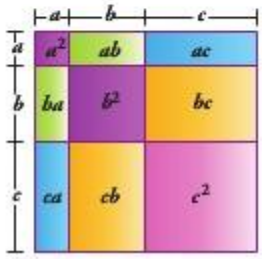
$A = (a + b + c)^2$

$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

Por tanto:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$



- También se puede calcular el cuadrado de un trinomio, mediante la propiedad distributiva, así:

$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c)$	Se escribe la multiplicación.
$= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)$	Se aplica la propiedad distributiva.
$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$	Se aplica la propiedad distributiva.
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$	Se reducen términos semejantes.

- Otra manera para calcular el cuadrado de un trinomio es utilizando la propiedad asociativa y aplicar el cuadrado de un binomio.

$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2$	Se agrupan los términos.
$= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$	Se aplica el cuadrado de un binomio.
$= (a + b)^2 + (2a + 2b)c + c^2$	Se aplica la propiedad distributiva.
$= (a + b)^2 + 2ac + 2bc + c^2$	Se aplica la propiedad distributiva.
$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$	Se aplica el cuadrado de un binomio.
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	Se ordenan los términos.

Por ejemplo, $(2p + 3q + 4r)^2$ se desarrolla de la siguiente manera:

$(2p + 3q + 4r)^2 = [(2p + 3q + 4r)]^2$	Se agrupan los términos.
$= (2p + 3q)^2 + 2(2p + 3q)(4r) + (4r)^2$	Se aplica el cuadrado de un binomio.
$= (2p)^2 + 2(2p)(3q) + (3q)^2 + (4p + 6q)(4r) + (4r)^2$	Se aplica el cuadrado de un binomio.
$= 4p^2 + 12pq + 9q^2 + 16pr + 24qr + 16r^2$	Se realizan operaciones.
$= 4p^2 + 9q^2 + 16r^2 + 12pq + 16pr + 24qr$	Se ordenan los términos.

Matemáticamente

¿Cómo puedes deducir la fórmula para determinar el desarrollo de un polinomio al cuadrado?

1.3 Producto de la suma por la diferencia

Recurso imprimible · Ampliación multimedia

Recuerda que...

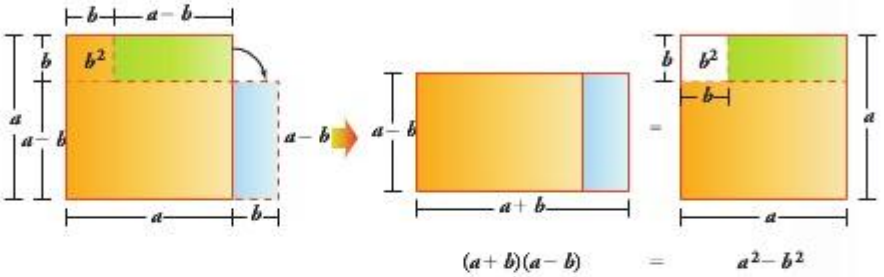
Dos binomios son conjugados, cuando difieren solo en los signos de uno de sus términos.

Por ejemplo, $(2a + 3b)$ y $(2a - 3b)$ son binomios conjugados.

La suma por la diferencia de dos términos se puede demostrar como el área de un rectángulo cuyas medidas de lados son $a + b$ y $a - b$ o multiplicando los términos y aplicando la propiedad distributiva.

La suma por la diferencia de dos términos es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

El área de un rectángulo de lados $(a + b)(a - b)$ se muestra a continuación:



El producto $(a + b)(a - b)$ se puede calcular mediante la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación, así:

$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$ Se aplica la propiedad distributiva.

$= a^2 - ab + ba - b^2$ Se aplica la propiedad distributiva.

$= a^2 - b^2$ Se reducen términos semejantes.

EJEMPLOS

Hallar el resultado de cada expresión aplicando productos notables.

a. $(2p + 3q - r^2)^2$

$= [(2p + 3q) - r^2]^2$ Se agrupan los términos.

$= (2p + 3q)^2 - 2(2p + 3q)r^2 + (r^2)^2$ Se aplica el cuadrado de un binomio.

$= (2p)^2 + 2(2p)(3q) + (3q)^2 - 4pr^2 - 6qr^2 + r^4$ Se aplica el cuadrado de un binomio.

$= 4p^2 + 12pq + 9q^2 - 4pr^2 - 6qr^2 + r^4$ Se realizan las operaciones.

$= 4p^2 + 9q^2 + r^4 + 12pq - 4pr^2 - 6qr^2$ Se ordena el resultado.

b. $(a - 1)(a + 1)$

$= a^2 - (1)^2 = a^2 - 1$ Se aplica el producto suma por diferencia.

Luego, $(a - 1)(a + 1) = a^2 - 1$.

c. $(x + 5)(x - 5)$

$= (x)^2 - (5)^2$ Se aplica el producto de suma por una diferencia.

$= x^2 - 25$ Se resuelven potencias.

Luego, $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$

d. $(4y^3 - z^2)(4y^3 + z^2)$

$= (4y^3)^2 - (z^2)^2$ Se aplica el producto de suma por diferencia.

$= 16y^6 - z^4$ Se aplican las propiedades de potenciación: potencia de una potencia y potencia de un producto.

Así, $(4y^3 - z^2)(4y^3 + z^2) = 16y^6 - z^4$.

e. $\left(\frac{1}{3} - m\right)\left(\frac{1}{3} + m\right)$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 - m^2$ Se aplica el producto de suma por diferencia.

$= \frac{1}{9} - m^2$ Se resuelven potencias.

Luego, $\left(\frac{1}{3} - m\right)\left(\frac{1}{3} + m\right) = \frac{1}{9} - m^2$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Razono · Soluciono problemas · Propongo

Deduce la fórmula para calcular el desarrollo de cada expresión.

38. $(a + b - c)^2$ **39.** $(a - b + c)^2$

Desarrolla las siguientes potencias.

40. $[a + (b + c)]^2$

41. $[p^2 + (2q - r)]^2$

42. $[m^2 + (n + 2m^2n)]^2$

43. $\left[\left(\frac{2}{5}x + 5y^2\right) - \frac{3}{5}z\right]^2$

44. $[(a^n + b^{n+1}) - c^{2n}]^2$

Determina el cuadrado de los trinomios.

45. $(a + 3b + c)^2$ **49.** $(w + 3y^3 + z^2)^2$

46. $\left(\frac{1}{2}x^2 + 3y^2 - c^2\right)^2$ **50.** $(2p + 3q^2 - r^2)^2$

47. $(m + 3n^2 + 4)^2$ **51.** $\left(\frac{1}{2}a^3 + 2b - \frac{2}{3}c^2\right)^2$

48. $\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b^n + \frac{1}{6}c^{2n}\right)^2$ **52.** $\left(\frac{1}{2}m + \frac{3}{5}n^x + n^2\right)^2$

Simplifica las siguientes expresiones.

53. $(x - 2)^2 + (x^2 + 2x - 1)^2$

54. $a - (a - b)^2 + (a + ab + b)^2$

55. $(w + z)^2 - (w + z - z^2)^2$

56. $(a + b)^2 + (a - b)^2 + (a + b + c)^2$

57. $x^2 + 2xy + (x + y)^2 + (x + y - z)^2$

58. $(2m + 3n)^2 + 6n^2 + (m + n + p)^2$

59. $(p + q + r)^2 + (p + q - r)^2$

60. $(p - q - r)^2 + (p - q - r)^2 + p^2$

61. $(x + y)^2 - (x - y)^2 - (x - y - r)^2$

62. Completa la tabla.

Lado del cuadrado	Área del cuadrado
$a + b - c$	
$\frac{1}{2}x + xy - y^2$	
$2m - mn + \frac{1}{2}n^2$	
$\frac{2}{3}w^2 - y^3 - \frac{3}{4}z^4$	

Halla el resultado de cada producto.

63. $(x + y)(x - y)$

64. $(a + 4)(a - 4)$

65. $(2x^2 + 3y^3)(2x^2 - 3y^3)$

66. $(x^2y^3 - 4z^2)(x^2y^3 + 4z^2)$

67. $\left(\frac{1}{2}m^2 + 5n^3\right)\left(\frac{1}{2}m^2 - 5n^3\right)$

68. $(0{,}2w - 1{,}2z^4)(0{,}2w + 1{,}2z^4)$

69. $\left(\frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{4}\right)$

70. $(x^n + y^{2n})(x^n - y^{2n})$

71. $(a^{n+1}b - c^{n+2})(a^{n+1}b + c^{n+2})$

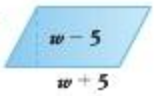
72. $(2x^{n+1}y^n - 6)(2x^{n+1}y^n + 6)$

Halla una expresión algebraica para determinar el área de cada terreno.

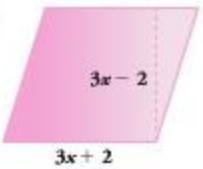
73.



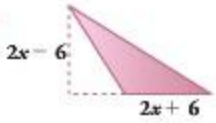
75.



74.



76.



En la figura, y es el radio del círculo menor y x es el radio del círculo mayor.



77. Expresa de dos formas equivalentes, el área de la región sombreada en términos de x y y.

78. Usa las dos expresiones del ejercicio anterior, para determinar el área de la región sombreada cuando $x = 10$ cm y $y = 7$ cm.

79. Si la suma de dos números es 8 y su resta es 2, ¿cuál es la diferencia entre sus cuadrados?

Actividad Recurso imprimible

Recuerda que...

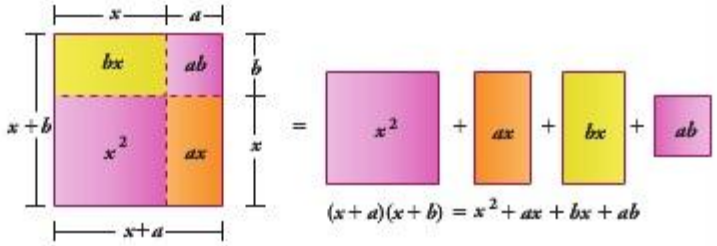
Los signos al multiplicar son:

$(+)\cdot(+) = +$
$(+)\cdot(-) = -$
$(-)\cdot(+) = -$
$(-)\cdot(-) = +$

1.4 Producto de dos binomios con un término común

El producto de dos binomios con un término común $(x + a)(x + b)$ es igual al cuadrado del término común (x^2), más el producto de la suma de los dos términos no comunes por el término común $(a + b)x$, más el producto de los términos no comunes (ab). Esto es $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

Este producto notable se puede demostrar mediante el área de un rectángulo de lados $x + a$ y $x + b$, respectivamente.



También se puede comprobar este producto mediante la multiplicación de los binomios así:

$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$ Se aplica la propiedad distributiva.

$= x^2 + xb + ax + ab$ Se aplica la propiedad distributiva.

$= x^2 + x(a + b) + ab$ Se reducen términos semejantes.

En general, el producto $(x + a)(x + b)$, es equivalente a $x^2 + sx + p$, en el cual $s = a + b$ y $p = a \cdot b$.

EJEMPLOS

1. Desarrollar los productos.

a. $(a + 6)(a - 8)$

$= (a)^2 + (6 - 8)(a) + 6(-8)$ Se aplica el producto notable.

$= a^2 - 2a - 48$ Se realizan operaciones.

b. $(x^3 + 4y)(x^3 - 2y)$

$= (x^3)^2 + (4y - 2y)x^3 + 4y(-2y)$ Se aplica el producto notable.

$= x^6 + 2x^3y - 8y^2$ Se realizan operaciones.

c. $(m^2 - 4)(m^2 - 3)$

$= (m^2)^2 + (-4 - 3)m^2 + (-4)(-3)$ Se aplica el producto notable.

$= m^4 - 7m^2 + 12$ Se realizan operaciones.

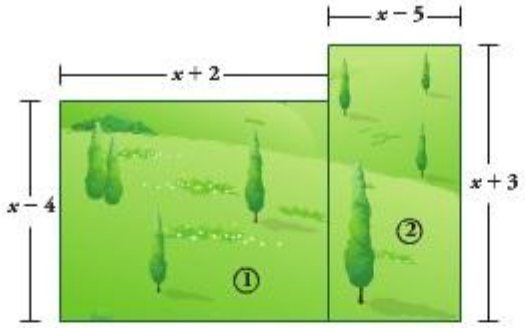
d. $(x^{n+1} + 3)(x^{n+1} + 8)$

$= (x^{n+1})^2 + (3 + 8)x^{n+1} + (3)(8)$ Se aplica el producto notable.

$= x^{2(n+1)} + 11x^{n+1} + 24$ Se realizan productos.

$= x^{2n+2} + 11x^{n+1} + 24$ Se aplican propiedades de potenciación.

2. Escribir una expresión algebraica para determinar el área del terreno.



El área del terreno está dada por la suma de las áreas de las regiones 1 y 2.

Primero, se halla el área de cada una de las regiones, así:

Área de la región 1: $(x + 2)(x - 4) = x^2 - 2x - 8$ Se utiliza el producto $(x + a)(x + b)$.

Área de la región 2: $(x - 5)(x + 3) = x^2 - 2x - 15$ Se utiliza el producto $(x + a)(x + b)$.

Segundo, se halla la suma de las áreas de las dos regiones, así:

$(x^2 - 2x - 8) + (x^2 - 2x - 15) = 2x^2 - 4x - 23$ Se reducen términos semejantes.

Luego, el área del terreno es:

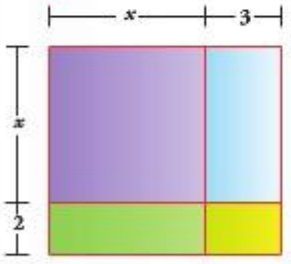
$$2x^2 - 4x - 23$$

Afianzo COMPETENCIAS

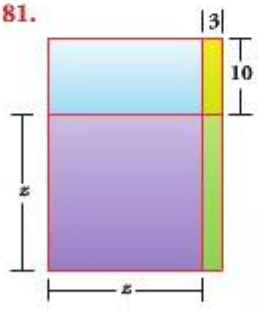
Interpreto · Argumento · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Escribe un producto para representar el área de cada figura. Luego, desarróllalo.

80.



81.



Escribe V, si la igualdad es verdadera, o F, si es falsa. Justifica la respuesta.

82. $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{16}$ ( )

83. $\left(x^5 + \frac{3}{5}\right)\left(x^5 + \frac{1}{10}\right) = x^{10} + \frac{3}{50}$ ( )

84. $\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{9}$ ( )

Realiza los siguientes productos.

85. $(x + 3)(x - 2)$

86. $(y - 7)(y + 4)$

87. $(w - 8)(w - 9)$

88. $(z + 6)(z + 5)$

89. $(a^3 + 5)(a^3 - 2)$

90. $(b^5 + 9)(b^5 - 2)$

91. $(m^3n^2 - 6p)(m^3n^2 - 2p)$

92. $(x^4y^5 - 3)(x^4y^5 - 5)$

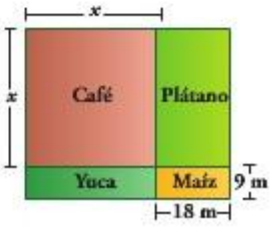
Completa cada expresión con los términos que faltan.

93. $(s + 8)(s____) = ___ - 2s - 80$

94. $(w____)(w - 9) = ___ - 15w + 54$

95. $(x^3 - 8)(___ + ___) = ___ + 4x^3 - ___$

96. Escribe la expresión que corresponde al área sembrada con todos los productos.



1.5 Cubo de un binomio

Recurso imprimible Actividad

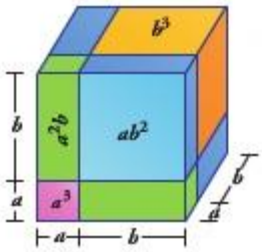
Cuando se halla el **cubo de un binomio** se deben tener en cuenta dos casos: el cubo de la suma de dos términos y el cubo de la diferencia de dos términos.

El **cubo de la suma de dos términos** $(a + b)^3$ es igual al cubo del primer término (a^3), más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo término $(3a^2b)$, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo término $(3ab^2)$, más el cubo del segundo término (b^3).

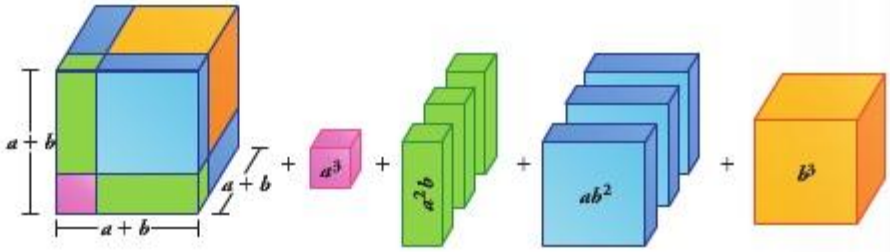
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

El volumen de un cubo es una expresión que relaciona valores elevados al cubo. Es decir,

$V = l^3$ donde l es la arista del cubo.



Para demostrar este producto notable se calcula el volumen de un cubo de arista $(a + b)$, así:

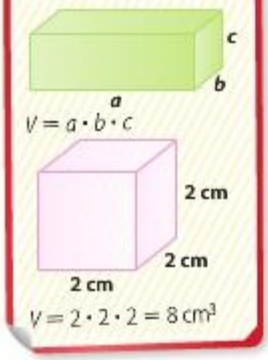


$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

También se puede hallar el producto de la siguiente manera:

$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$	Se escribe el cubo como un producto.
$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$	Se desarrolla el cuadrado de una suma.
$= a^2(a + b) + 2ab(a + b) + b^2(a + b)$	Se aplica la propiedad distributiva.
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$	Se aplica la propiedad distributiva.
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Se reducen términos semejantes.
Por ejemplo, $(1 + 7n)^3 = (1 + 7n)^2\,(1 + 7n)$	Se escribe el cubo como un producto.
$= [1^2 + 2(1)(7n) + (7n)^2](1 + 7n)$	Se desarrolla el cuadrado de una suma.
$= (1 + 14n + 49n^2)(1 + 7n)$	Se resuelven las operaciones.
$= 1(1 + 7n) + 14n(1 + 7n) + 49n^2(1 + 7n)$	Se aplica la propiedad distributiva.
$= 1 + 7n + 14n + 98n^2 + 49n^2 + 349n^3$	
$= 1 + 21n + 147n^2 + 349n^3$	Se reducen términos semejantes.

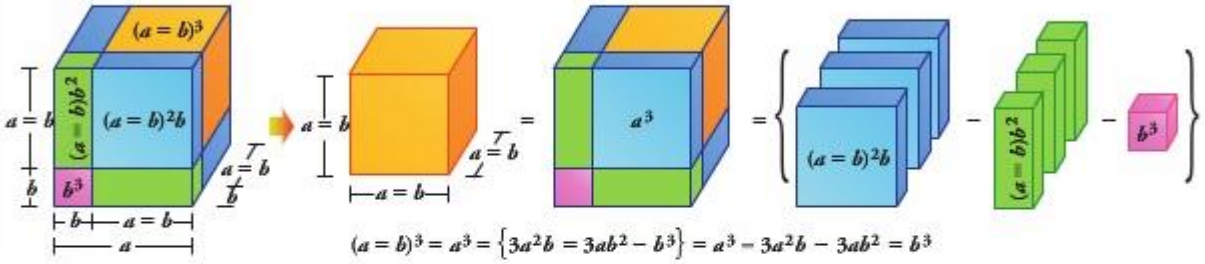
Recuerda que...



El **cubo de la diferencia de dos términos** $(a - b)^3$ es igual al cubo del primer término (a^3), menos el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo término $(3a^2b)$, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo término $(3ab^2)$, menos el cubo del segundo término (b^3).

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Con este producto notable, se calcula el volumen de un cubo de arista $(a - b)$, así:

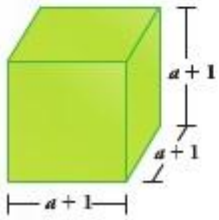


$$(a-b)^3 = a^3 = \{3a^2b = 3ab^2 - b^3\} = a^3 - 3a^2b - 3ab^2 = b^3$$

EJEMPLOS

1. Hallar la expresión que corresponde al volumen de cada recipiente.

a.



El volumen del recipiente en forma cúbica es igual a la arista $a + 1$ elevada al cubo:

$V = (a + 1)^3$.

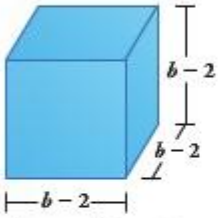
$V = a^3 + 3(a)^2(1) + 3(a)(1)^2 + (1)^3$ Se aplica el binomio al cubo.

$V = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ Se realizan operaciones.

Luego, el volumen del recipiente se expresa así:

$V = (a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

b.



El volumen del recipiente en forma cúbica es igual a la arista $b - 2$ elevada al cubo.

$V = (b - 2)^3$

$V = b^3 - 3(b)^2(2) + 3(b)(2)^2 - (2)^3$ Se aplica el binomio al cubo.

$V = b^3 - 6b^2 + 12b - 8$ Se realizan operaciones.

Luego, el volumen del recipiente se expresa así:

$V = (b - 2)^3 = b^3 - 6b^2 + 12b - 8$

2. Calcular el resultado de cada expresión.

a. $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^3$

Primero, se identifican el primer término y el segundo término.

Primer término: $2x$ Segundo término: $\frac{1}{2}$

Segundo, se aplica el cubo de un binomio.

$$\left(2x + \tfrac{1}{2}\right)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2\left(\tfrac{1}{2}\right) + 3(2x)\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3$$

Finalmente, se resuelven operaciones.

$8x^3 + 3(4x^2)\left(\frac{1}{2}\right) + 3(2x)\frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$

$= 8x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$.

Así: $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^3 = 8x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$.

b. $(3x - 2)^3$

Primero, se identifican el primer término y el segundo término.

Primer término: $3x$ Segundo término: 2

Segundo, se aplica el cubo de la diferencia de dos términos.

$(3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(2) + 3(3x)(2)^2 - (2)^3$

Finalmente, se resuelven operaciones.

$(3x)^3 - 3(9x^2)(2) + 3(3x)(4) - 8 =$

$= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

Luego, $(3x - 2)^3 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$.

c. $(4 + 2x)^3$

El primer término es 4 y el segundo término, $2x$.

$(4 + 2x)^3 = (4)^3 + 3(4)^2(2x) + 3(4)(2x)^2 + (2x)^3$

$= 64 + 3(16)(2x) + 3(4)(4x^2) + 8x^3$

$= 64 + 96x + 48x^2 + 8x^3$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Propongo · Razono · Argumento · Soluciono problemas

Calcula el cubo de cada expresión.

97. m

98. $3n$

99. $5x^2$

100. $\frac{7}{3}x^3$

101. $-6n^3b^4$

102. $0{,}3x^4y^6z^2$

103. $\sqrt{5}\,s^3p^7$

104. $-\frac{2}{5}x^{3n+1}$

Resuelve cada expresión utilizando el cubo de un binomio.

105. $(x-6)^3$

106. $(2x+3)^3$

107. $\left(3z-\frac{1}{3}\right)^3$

108. $(xy^2+4)^3$

109. $(3a-2)^3$

110. $\left(\frac{2}{3}b+\frac{3}{4}\right)^3$

111. $\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}x\right)^3$

112. $\left(\frac{3}{5}x-5\right)^3$

113. $(x^n-y^m)^3$

114. $(u^{n+1}+1)^3$

115. $\left(\frac{1}{2}z^n-2\right)^3$

116. $\left(\frac{2}{27}x^{n+1}-6x\right)^3$

117. $\left(\frac{1}{6}b+\frac{3}{45}\right)^3$

118. $\left(\frac{4}{5}mx^2-\frac{1}{4}\right)^3$

119. Comprueba que:

$$(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$$

Escribe V, si la igualdad es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

120. $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$ ( )

121. $(b-2)^3=b^3-3b^2+12b-8$ ( )

122. $(m+0{,}2)^3=(m^2+0{,}2)(m+0{,}2)^2$ ( )

123. $(x+y)^3=x^3+3xy(x+y)+y^3$ ( )

Completa las casillas para que se cumplan las siguientes igualdades.

124. $\left(x+\square\right)^3=x^3+3x^2+\square+1$

125. $(a-2)^3=\square-6a^2+\square-8$

126. $\left(\square+3\right)^3$

$=y^3+\square+27y+\square$

Resuelve.

127. Si $m+n=6$ y $\frac{mn}{2}=4$, calcula m^3+n^3.

128. Si $x+y=11$ y $xy=24$, calcula x^3+y^3.

Simplifica aplicando los productos notables.

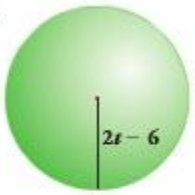
129. $(x+2)^3-[(2x-1)^3+(2x+1)^3]$

130. $(x+3)^3-(x-3)^3-9(x^2+6)$

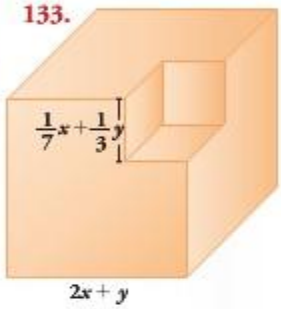
131. $\dfrac{(2ab+c)^3-(2ab-c)^3+10c^3}{6a^2b^2+3c^2}$

Calcula el volumen de cada cuerpo.

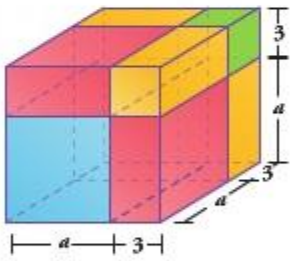
132.



133.



134. Halla el área del prisma celeste teniendo en cuenta que el volumen de toda la figura es 9.261u^3.



Encierra y corrige los errores que se cometieron en el desarrollo de cada producto notable.

135. $(2m^x+n^y)^3$

$=(2m^x)^3+3(2m^x)^2n^y+3(2m^x)(n^y)^2+(2n^y)^3$

$=8m^{3x}+6m^x+n^y+6m^xn^y+n^{3y}$

136. $(x^{y+2}+4y^{x-2})^3$

$=(x^{y+2})^3+3(x^{y+2})^2(4y^{x-2})+3(4y^{x-2})^2+$
$+(4y^{x-2})^2$

$=x^{3y+6}+12x^{2y+4}y^{x-2}+12y^{2x-4}+16y^{2x-4}$

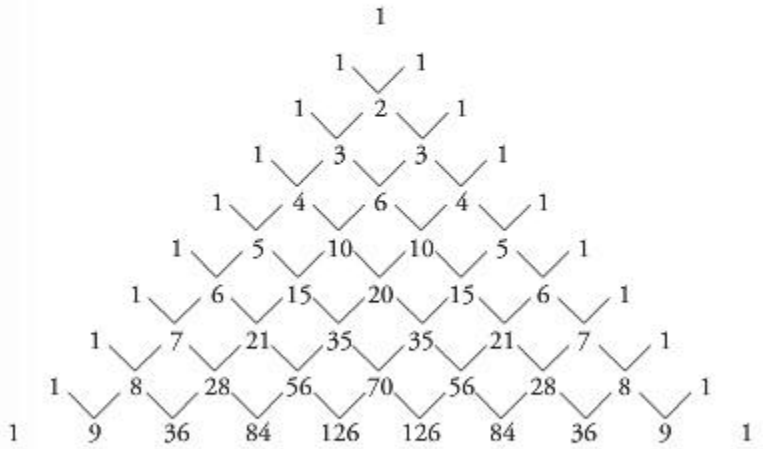
Lo que viene...

En las próximas páginas trabajarás el triángulo de Pascal. Consulta la biografía de Blaise Pascal y su relación con dicho triángulo.

2. El triángulo de Pascal

Ampliación multimedia Enlace web

El **triángulo de Pascal** es un arreglo de números que permite hallar los coeficientes de expresiones de la forma $(a \pm b)^n$, donde n es un número natural.



En el triángulo de Pascal, cada fila comienza y termina en 1. El resto de valores se obtiene de la suma de los dos números que se encuentran exactamente sobre él, ubicados en la fila inmediatamente superior.

Por ejemplo, en la última fila el número 36 se obtiene de la suma de los dos números que están encima de él en la fila anterior, es decir, 8 + 28.

Se pueden analizar algunas características al desarrollar la potencia de un binomio de la forma $(a + b)^n$.

Por ejemplo, a partir de la expresión $(x + y)^5$ para $n = 5$.

$$(x + y)^5 = (x + y)^2(x + y)^3$$

$$= (x^2 + 2xy + y^2)(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$= x^2(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + 2xy(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + y^2(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$= x^5 + 3x^4y + 3x^3y^2 + x^2y^3 + 2x^4y + 6x^3y^2 + 6x^2y^3 + 2xy^4 + x^3y^2 + 3x^2y^3 + 3xy^4 + y^5$$

$$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Por tanto, $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

El desarrollo sigue un patrón determinado. Así:

- El número de términos es uno más el exponente.
- Los exponentes de x disminuyen de 1 en 1 a partir del primer término en el que el exponente es 5.
- Los exponentes de y aumentan de 1 en 1 a partir del segundo término en el que el exponente es 1.
- La suma de los exponentes de cada término es el valor de la potencia de cada binomio.
- Finalmente, los coeficientes numéricos de cada término están dados por los números del triángulo de Pascal, donde el segundo término de la fila es cinco.

Historia de las matemáticas



Blaise Pascal (Francia, 1623-1662) fue un genio matemático.

Desarrolló la geometría proyectiva y la teoría de la probabilidad. Escribió también el *Tratado del Triángulo Aritmético.*

Recurso imprimible

Recuerda que...

Todo número diferente de cero elevado al exponente cero, da como resultado 1.

$a^0 = 1$ si $a \neq 0$.

Todo número elevado al exponente 1, da como resultado el mismo número.

$a^1 = a$

Desarrollo de las cinco primeras potencias del binomio $a + b$

Actividad

La siguiente tabla muestra el desarrollo de las cinco primeras potencias del binomio $a + b$, teniendo en cuenta los coeficientes dados en el triángulo de Pascal.

Coeficientes del triángulo de Pascal	n	$(a + b)^n$	Desarrollo
1	0	$(a + b)^0$	1
1	0	$(a - b)^0$	1
1, 1	1	$(a + b)^1$	$1a + 1b$
1, 1	1	$(a - b)^1$	$1a - 1b$
1, 2, 1	2	$(a + b)^2$	$1a^2 + 2ab + b^2$
1, 2, 1	2	$(a - b)^2$	$1a^2 - 2ab + b^2$
1, 3, 3, 1	3	$(a + b)^3$	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
1, 3, 3, 1	3	$(a - b)^3$	$1a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
1, 4, 6, 4, 1	4	$(a + b)^4$	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
1, 4, 6, 4, 1	4	$(a - b)^4$	$1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1b^4$

EJEMPLOS

1. Hallar los factores literales del binomio $(m + 2n)^4$.

Primero, se escriben en forma descendente las potencias de m a partir de m^4, y en orden ascendente las potencias de $2n$, hasta $(2n)^4$.

Así: m^4, $m^3(2n)$, $m^2(2n)^2$, $m(2n)^3$, $(2n)^4$

Luego, se realizan las potencias y las multiplicaciones de los términos.

$$m^4,\ 2m^3n,\ 4m^2n^2,\ 8mn^3,\ 16n^4$$

Entonces, los factores literales del binomio son:

$$m^4,\ 2m^3n,\ 4m^2n^2,\ 8mn^3,\ 16n^4.$$

2. Resolver la expresión $(2x + y)^5$.

Primero, se hallan los factores literales de cada término, así:

$$(2x)^5,\ (2x)^4(y),\ (2x)^3(y)^2,\ (2x)^2(y)^3,\ (2x)(y)^4,\ y^5$$

Segundo, como el binomio está elevado a la 5, se ubica en el triángulo de Pascal en la fila donde el segundo término es 5. Esta fila tiene los números 1, 5, 10, 10, 5, 1, que son los coeficientes de las partes literales halladas.

Entonces, se tiene:

$$(2x + y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4(y) + 10(2x)^3(y)^2 + 10(2x)^2(y)^3 + 5(2x)(y)^4 + y^5$$

Finalmente, se resuelven las potencias y los productos.

$$(2x + y)^5 = 32x^5 + 5(16x^4)(y) + 10(8x^3)(y)^2 + 10(4x^2)(y)^3 + 5(2x)(y)^4 + y^5$$

$$= 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$$

Por tanto, se tiene que:

$$(2x + y)^5 = 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5.$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Razono · Argumento · Propongo

137. Completa la siguiente tabla.

Expresión	Potencia
$(5x^2)^3$	
$(-2a^3b^4c)^4$	
$\left(-\frac{1}{2}xy^2z^3\right)^5$	
$\left(\frac{1}{3}mn^2y^7\right)^6$	
$\left(-\frac{2}{3}x^3y^5z^2\right)^7$	

Escribe el primer y el último términos en el desarrollo de cada binomio.

138. $(a + c)^3$

139. $(k - b)^7$

140. $(x^2 - m)^6$

141. $\left(\frac{1}{2} - z\right)^{10}$

142. $(t^2 - w^3)^8$

143. $(a + 2b)^9$

144. $(5 - 7a)^5$

145. $\left(\frac{3}{7}z^2 + \frac{w}{7}\right)^3$

Determina los términos literales en el desarrollo de cada binomio.

146. $(x + 7y)^2$

147. $(2x + 6y)^3$

148. $(5y - 2m)^4$

149. $(x^2y - z)^5$

150. $(0{,}2x^3 + 0{,}1y)^4$

151. $(mn^2 + y)^6$

152. $(ab + 2a)^8$

153. $(5x - 2y)^9$

Desarrolla cada binomio utilizando el triángulo de Pascal.

154. $(3y + 2)^6$

155. $\left(2x - \frac{1}{2}y\right)^7$

156. $\left(6xy^2 - \frac{3}{5}\right)^4$

157. $(2 + 0{,}3y)^3$

158. $(m - 2)^8$

159. $\left(\frac{1}{7}w + \frac{2}{5}y\right)^4$

160. $\left(2m + \frac{3}{7}n^x\right)^3$

161. $\left(\frac{1}{2}x^{n+1} - \frac{1}{2}y^n\right)^4$

162. $\left(\frac{4}{3}y^x - \frac{1}{4}\right)^5$

163. $(1 - y^2x)^8$

164. $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^4$

165. $\left(\frac{3}{2}wy - 4w^2\right)^6$

166. $(0{,}3x^2 + 10y)^3$

167. $(xy - 2z)^6$

168. $(mw - 3x)^7$

169. $\left(\frac{3}{2}w^{2y} - \frac{1}{4}\right)^6$

170. $\left(\frac{2}{7}m^x - \frac{1}{4}\right)^3$

171. $\left(x^{y+2} - \frac{1}{3}x^{y-1}\right)^4$

Halla el término que se indica.

172. El término central de $(3x + 2y)^4$

173. Los términos centrales de $(5a + 4)^5$

174. El término central de $\left(m - \frac{3}{5}\right)^6$

175. El cuarto término de $(2 - 3a^3)^7$

176. El tercer término de $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}\right)^6$

177. El quinto término de $\left(4x - \frac{3}{2}\right)^6$

178. El segundo término de $\left(\frac{3}{2}pq^2 - \frac{2}{3}pr^2\right)^4$

179. Determina si el binomio $\left(\frac{2}{3}m^4n^5 - z\right)^4$ contiene en alguno de sus términos a m^4n^5 como parte literal. Explica tu respuesta.

Lee la siguiente información.

Otro método para desarrollar el binomio $(a + b)^n$ es mediante la fórmula del binomio de Newton que se expresa de la siguiente manera:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{n-4}b^4 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^{n-5}b^5 + \\ + \ldots + b^n$$

Los signos de los términos del desarrollo de $(a + b)^n$ son positivos, pero los de $(a - b)^n$ se alternan: $+, -, +, \ldots$

Desarrolla cada binomio utilizando la fórmula del binomio de Newton.

180. $(a + b)^4$

181. $(a - b)^6$

182. $(x + y)^8$

183. $(2x^2 + 1)^5$

184. $(3x + 2)^6$

185. $(2x^3 - 3y^2)^7$

186. $\left(\frac{x}{3} + 1\right)^4$

187. $\left(\frac{x}{2} - 2\right)^5$

188. $\left(3m - \frac{2}{5}n\right)^4$

Escribe un binomio elevado a un exponente tal que, al desarrollarlo, los coeficientes sean los que se muestran en cada caso.

189. 8, 12, 6, 1

190. 27, −54, 36, −8

191. 1, 5, 10, 10, 5, 1

192. 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

3. Cocientes notables

Recurso imprimible | Ampliación multimedia | Actividad

Los **cocientes notables** son aquellos que resultan de divisiones exactas entre polinomios.

Para determinar los cocientes notables, es necesario tener en cuenta lo siguiente:

- $\frac{a^n + b^n}{a - b} \rightarrow a^n + b^n$ nunca es divisible por $a - b$.
- $\frac{a^n - b^n}{a - b} \rightarrow a^n - b^n$ siempre es divisible por $a - b$, para $n \in \mathbb{Z}^+$.
- $\frac{a^n - b^n}{a + b} \rightarrow a^n - b^n$ es divisible por $a + b$ solo si n es par, para $n \in \mathbb{Z}^+$.
- $\frac{a^n + b^n}{a + b} \rightarrow a^n + b^n$ es divisible por $a + b$ solo si n es impar, para $n \in \mathbb{Z}^+$.

En la siguiente tabla se presentan algunos de los cocientes notables más utilizados:

Nombre	Desarrollo	Definición
Cociente de la forma $\frac{x^2 - a^2}{x + a}$	$\frac{x^2 - a^2}{x + a} = x - a$	La diferencia de los cuadrados de dos términos, dividida entre la suma de dichos términos, es igual a la diferencia de los términos.
Cociente de la forma $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$	$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$	La diferencia de los cuadrados de dos términos, dividida entre la diferencia de dichos términos, es igual a la suma de los términos.
Cociente de la forma $\frac{x^3 + a^3}{x + a}$	$\frac{x^3 + a^3}{x + a} = x^2 - ax + a^2$	La suma de los cubos de dos términos, dividida entre la suma de dichos términos, es igual al cuadrado del primer término, menos el producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.
Cociente de la forma $\frac{x^3 - a^3}{x - a}$	$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2$	La diferencia de los cubos de dos términos, dividida entre la diferencia de dichos términos, es igual al cuadrado del primer término, más el producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Matemáticamente

Utiliza la división para hallar el resultado del cociente.

$$\frac{x^3 + a^3}{x + a}$$

Se pueden comprobar estos cocientes realizando las divisiones. Por ejemplo, al efectuar la división de $x^2 - a^2$ entre $x - a$, se tiene,

$$\begin{array}{r|l} x^2 - a^2 & x - a \\ \cline{2-2} -x^2 + ax & x + a \\ \cline{1-1} \quad + ax - a^2 & \\ \quad - ax + a^2 & \\ \cline{1-1} \quad 0 & \end{array}$$

Para encontrar el cociente en las divisiones exactas que son posibles, sin necesidad de realizar la división paso a paso, se tienen en cuenta las siguientes pautas:

- El número de términos del cociente es igual al exponente de los términos en el dividendo y el primer término del cociente es el resultado de dividir el primer término del dividendo, por el primer término del divisor.
- El exponente del primer término del divisor va disminuyendo de 1 en 1 en el cociente y el exponente del segundo término del divisor es 1 en el segundo término del cociente y va aumentando de 1 en 1 en los siguientes términos.
- Cuando el divisor es una diferencia de dos términos, los signos del cociente son positivos y cuando el divisor es una suma, los signos del cociente se alternan comenzando por el signo más.

Cociente de la forma $\frac{x^n - a^n}{x - a}$

La diferencia de potencias pares o impares, siempre es divisible entre la diferencia de sus bases. Además se tiene que:

$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Cociente de la forma $\frac{x^n - a^n}{x + a}$

La diferencia de potencias pares iguales, siempre es divisible entre la suma de sus bases. Además se tiene que:

$\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots + xa^{n-2} - a^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, n es par.

Cociente de la forma $\frac{x^n + a^n}{x + a}$

La suma de potencias impares iguales, siempre es divisible entre la suma de sus bases.

$\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots - xa^{n-2} + a^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, n es impar.

EJEMPLOS

1. Resolver el siguiente cociente realizando una división $\frac{m^5 - y^5}{m - y}$.

$$
\begin{array}{r|l}
m^5 + 0m^4y + 0m^3y^2 + 0m^2y^3 + 0my^4 - y^5 & m - y \\
\cline{2-2}
-m^5 + m^4y & m^4 + m^3y + m^2y^2 + my^3 + y^4 \\
\cline{1-1}
0 + m^4y + 0m^3y^2 & \\
-m^4y + m^3y^2 & \\
\cline{1-1}
m^3y^2 + 0m^2y^3 & \\
-m^3y^2 + m^2y^3 & \\
\cline{1-1}
m^2y^3 + 0my^4 & \\
-m^2y^3 + my^4 & \\
\cline{1-1}
my^4 - y^5 & \\
-my^4 + y^5 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Luego, $\frac{m^5 - y^5}{m - y} = m^4 + m^3y + m^2y^2 + my^3 + y^4$

Recuerda que...
La división $\frac{x^n + a^n}{x - a}$ no es exacta, sea n una potencia par o impar.

2. Demostrar los cocientes notables en cada caso.

a. $\frac{x^2 - a^2}{x + a} = x - a$

Al efectuar la división $x^2 - a^2$ entre $x + a$ se tiene:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - a^2 & x + a \\ \hline -x^2 - ax & x - a \\ \quad -ax - a^2 & \\ \quad\ ax + a^2 & \\ \hline \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Así, se cumple que $\frac{x^2 - a^2}{x + a} = x - a$.

b. $\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2$

Si se efectúa la división de $x^3 - a^3$ entre $x - a$, se tiene:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - a^3 & x - a \\ \hline -x^3 + ax^2 & x^2 + ax + a^2 \\ \quad ax^2 & \\ \quad -ax^2 + a^2x & \\ \quad\ a^2x - a^3 & \\ \quad -a^2x + a^3 & \\ \hline \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Luego, $\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2$.

3. Resolver los siguientes cocientes notables.

a. $\frac{4n^2 - 1}{2n + 1}$

Primero, se reescribe la división siguiendo el esquema de la forma general, así

$$\frac{4n^2 - 1}{2n + 1} = \frac{(2n)^2 - (1)^2}{2n + 1}$$

Luego, se aplica el cociente de la forma $\frac{x^2 - a^2}{x + a}$

Por tanto, $\frac{4n^2 - 1}{2n + 1} = \frac{(2n)^2 - (1)^2}{2n + 1} = 2n - 1$.

b. $\frac{9w^2 - 16a^2}{3w + 4a}$

Primero, se reescribe la división siguiendo el esquema de la forma general, así:

$$\frac{9w^2 - 16a^2}{3w + 4a} = \frac{(3w)^2 - (4a)^2}{3w + 4a}$$

Luego, como las bases están elevadas al cuadrado, se aplica el cociente de la forma:

$$\frac{x^2 - a^2}{x + a} = x - a.$$

Por tanto, $\frac{9w^2 - 16a^2}{3w + 4a} = \frac{(3w)^2 - (4a)^2}{3w + 4a} = 3w - 4a.$

c. $\frac{8m^3 - p^3}{2m - p}$

Primero, se reescribe la división en la forma general.

$$\frac{8m^3 - p^3}{2m - p} = \frac{(2m)^3 - p^3}{2m - p}$$

Segundo, como las bases están elevadas al cubo, se aplica el cociente: $\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2$

Finalmente,

$$\frac{8m^3 - p^3}{2m - p} = \frac{(2m)^3 - p^3}{2m - p} = (2m)^2 + (2m)(p) + p^2$$

$$= 4m^2 + 2mp + p^2$$

d. $\frac{16x^8 - 625y^4}{2x^2 + 5y}$

Primero, al reescribir la división se obtiene:

$$\frac{16x^8 - 625y^4}{2x^2 + 5y} = \frac{(2x^2)^4 - (5y)^4}{2x^2 + 5y}$$

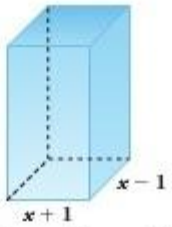
Segundo, se aplica el cociente notable de la forma $\frac{x^n - a^n}{x + a}$.

$$\frac{(2x^2)^4 - (5y)^4}{2x^2 + 5y} =$$

$$= (2x^2)^3 - (2x^2)^2(5y) + (2x^2)(5y)^2 - (5y)^3$$

$$= 8x^6 - 20x^4y + 50x^2y^2 - 125y^3$$

4. Hallar una expresión algebraica para determinar la altura del paralelepípedo.



$V = x^{10} - 1$

La altura del paralelepípedo se determina al calcular el cociente entre el volumen y el producto de las dos dimensiones conocidas así:

$$\frac{x^{10} - 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x^2)^5 - 1}{(x^2) - 1}$$

$$= ((x)^2)^4 + ((x)^2)^3(1) + ((x)^2)^2(1)^2 + ((x)^2)^1(1)^3 + (1)^4$$

$$= x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$$

Entonces, la altura del paralelepípedo es:

$x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Razono · Soluciono problemas · Propongo

193. Escribe el procedimiento que harías para hallar la longitud de la cerca si se sabe que su área es: $m^5 + 1.024n^5$ unidades cuadradas, y se conoce el ancho de la finca.



E Halla el cociente de las siguientes divisiones.

194. $\frac{m^2 - 25}{m - 5}$

195. $\frac{m^4 - 4}{m^2 - 2}$

196. $\frac{81y^6 - 1}{9y^3 + 1}$

197. $\frac{8x^3 + 27}{2x + 3}$

198. $\frac{a^6b^3c^3 + 1}{a^2bc + 1}$

199. $\frac{216 + w^3z^6}{6 + wz^2}$

200. $\frac{64a^3 - 125b^3}{4a - 5b}$

201. $\frac{x^{2n} - y^{2n}}{x^n - y^n}$

202. $\frac{m^4 - n^4}{m - n}$

203. $\frac{a^8 - b^8}{a + b}$

204. $\frac{x^7 - y^7}{x - y}$

205. $\frac{16a^4 - b^4}{2a + b}$

206. $\frac{m^{14} - n^{14}}{m^2 - n^2}$

207. $\frac{y^{15} - z^{15}}{y^3 - z^3}$

R Escribe los términos que faltan para formar divisiones exactas. Luego, halla el cociente.

208. $\frac{x^2 - 81}{\square\ \square\ \square}$

209. $\frac{4 - \square}{2 - 7m}$

210. $\frac{25m^6n^4 - 4}{5m^3n^2 - \square}$

211. $\frac{x^9y^6z^3 - \square}{x^3y^2z - \square}$

212. $\frac{216a^{12}b^{24} - c^{27}}{\square - \square}$

213. $\frac{8m^9n^6 - \square}{2m^3n^2 - \square}$

214. $\frac{1.000m^3 + 8b^3}{\square + \square}$

215. $\frac{w^{3x} - z^{6x}}{\square - \square}$

R Determina el dividendo y el divisor para los siguientes cocientes.

216. $a^6 - a^4b^2 + a^2b^4 - b^6$

217. $x^{12} - x^9y^3 + x^6y^6 - x^3y^9 + y^{12}$

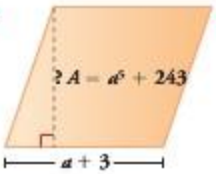
218. $a^{15} - a^{10}b^5 + a^5b^{10} - b^{15}$

S Halla las dimensiones desconocidas en cada figura.

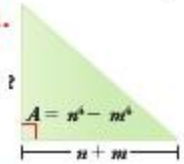
219.



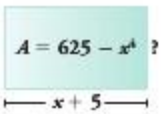
220.



221.



222.



S Determina la expresión para el área de la base A, si se conoce la altura h y el volumen V de cada cuerpo.

223.



$h = 2a + b$

$V = 8a^3 + b^3$

224.



$h = x + 2$

$V = x^6 - 64$

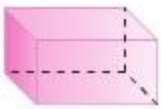
225.



$h = 4x - 7$

$V = 64x^3 - 343$

226.



$h = 2m + 1$

$V = 32m^5 + 1$

Construye un polinomio para cada condición.

227. De segundo grado, divisible entre $x - 3$

228. De sexto grado divisible entre $(m + 1)$ y $(m - 1)$

Calcula los valores de k y s para que la división entre los polinomios indicados sea exacta.

229. $(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - kx + s) \div (x^2 - 2x + 1)$

230. $(4x^4 - 2x^2 + kx + s) \div (x^2 - x + 1)$

EJERCICIOS PARA REPASAR

Productos notables

Utiliza los productos notables para indicar el resultado de cada expresión.

231. $\left(\frac{1}{2}x + 3y\right)^2 =$ _____

232. $(3x^2y - z^3)^2 =$ _____

233. $(a + 2 - c)^2 =$ _____

234. $(a^2b - 2)(a^2b + 2) =$ _____

235. $(2xy + z^2)(2xy - z^2) =$ _____

236. $(a^n + b^{n+1})(a^n - b^{n+1}) =$ _____

237. $(4x + 3)(4x - 2) =$ _____

238. $(a^2b + 8)(a^2b - 6) =$ _____

239. $(m^3 - 3)(m^3 - 7) =$ _____

240. $(3w + 2)^3 =$ _____

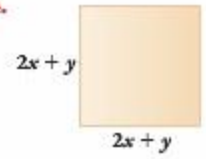
241. $\left(\frac{1}{2}ab + 3c\right)^3 =$ _____

242. $(a^x - b^{x+1})^3 =$ _____

243. $\left(\frac{1}{3}a^3b^2 - 2c^2\right)^3 =$ _____

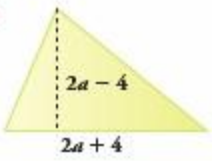
Determina una expresión para el área de la región sombreada.

244.



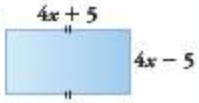
Área: _____

245.



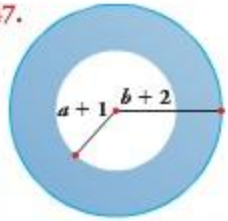
Área: _____

246.



Área: _____

247.



Área: _____

Simplifica, en tu cuaderno, cada expresión utilizando los productos notables.

248. $(x + 4)(x - 3) + (x - 2)(x + 8)$

249. $(x - 2)^4 - (x + 2)^2$

250. $(x + 4)(x - 4) - (x^2 - 16)$

251. $(x - 4)(x - 3) - (x + 4)(x + 3)$

El área superficial A de un cilindro recto está dada por la expresión:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

donde h es la altura y r es el radio de la base.

Determina una expresión de A para los valores de h y r dados.

252. $h = x + 1$ y $r = x - 2$

$A =$ _____

253. $h = a + 3$ y $r = a - 5$

$A =$ _____

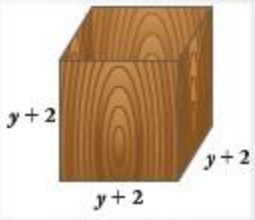
254. $h = m - 5$ y $r = m - 8$

$A =$ _____

255. $h = v + 7$ y $r = v - 4$

$A =$ _____

Se va a construir un cubo de madera, sin tapa, de arista $y + 2$ cm.



256. Escribe una expresión que represente la cantidad de madera usada.

257. Escribe una expresión para el volumen.

Triángulo de Pascal

Desarrolla los siguientes binomios utilizando el triángulo de Pascal.

258. $(5x + 2y)^4 =$ _____

259. $(3p - 2q)^6 =$ _____

260. $(m + 2n)^7 =$ _____

261. $(w + 2z)^9 =$ _____

262. $(1 + 3r)^5 =$ _____

263. $(4x - 2y)^4 =$ _____

264. $(5a - 2b)^6 =$ _____

265. $(2s - 3r)^4 =$ _____

266. $(x + y^n)^4 =$ _____

267. $(5m^{2y} - 3n^x)^3 =$ _____

268. $(2a^{3+x} + b^x)^7 =$ _____

269. $(c - 2d^{5x})^4 =$ _____

270. $(m + 3ny^{x+1}z^n)^5 =$ _____

Cocientes notables

Halla el resultado de cada división utilizando los cocientes notables.

271. $\dfrac{x^2 - 36}{x + 6}$

272. $\dfrac{81m^4 - 4n^2}{9m^2 - 2n}$

273. $\dfrac{\frac{9}{25}a^{4n+6} - \frac{1}{16}b^{6n}}{\frac{3}{5}a^{2n+3} - \frac{1}{4}b^{3n}}$

274. $\dfrac{27x^6 + 1}{3x^2 + 1}$

275. Completa la tabla.

Dividendo	Divisor	Cociente
$x^5 - y^5$		$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$
$1 + 64m^3$	$1 + 4m$	
$m^7 + n^7$	$m + n$	
$x^5 - y^5$	$x - y$	
$1 - x^6y^8$		$1 - x^3y^4$
$x^6 - 729$		$x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 81x + 243$
$x^5 + 243y^5$	$x + 3y$	

Escribe V, si la igualdad es verdadera o F, si es falsa. En caso de ser falsa, escribe una igualdad que sea correcta.

276. $\dfrac{a^4 + b^5}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 + b^3$ ( )

_____

277. $\dfrac{x^6 + y^6}{x - y} = x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 + y^5$ ( )

_____

278. $\dfrac{1 - n^5}{1 - n} = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ ( )

_____

279. Escribe posibles expresiones para la altura y el área de la base del cuerpo, a partir de la expresión del volumen.



$h =$ _____

$A =$ _____

$V = x^{18} - y^{18}$

PROBLEMAS PARA REPASAR

Un carpintero debía construir una mesa en forma cuadrada de x cm de lado. Al entregarla, el cliente notó que tenía un error de 5 cm más en cada lado, por lo cual le pidió que arreglara la mesa con las medidas correctas.

¿Qué expresión algebraica representa la cantidad de material que se perderá al corregir el error?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

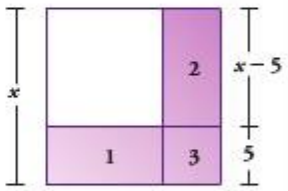
¿Qué expresión algebraica representa la cantidad de material que se perderá al corregir el error?

¿Cuáles son los datos del problema?

La mesa debe tener forma cuadrada cuya medida es x cm de lado. La mesa que se entregó al cliente mide 5 cm más de lo que debía medir en cada lado.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se realiza una representación gráfica de la situación. En este caso, se dibuja un cuadrado y se incluyen las medidas correspondientes en términos de x. Además, se divide en cuatro regiones, de las cuales, las regiones 1, 2 y 3 que aparecen sombreadas en la figura, corresponden al material que se pierde al corregir el error.



Luego, se expresa el área A de la región sombreada como la diferencia entre el área de la mesa de lado x y el área de la mesa de lado $x - 5$. Así que:

$A = x^2 - (x - 5)^2$ Se plantea la expresión general para determinar el área de la región que sobra.

$= x^2 - (x^2 - 10x + 25)$ Se resuelve el producto notable.

$= x^2 - x^2 + 10x - 25$ Se multiplica por $(-)$ el paréntesis.

$= 10x - 25$ Se reducen términos semejantes.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Para verificar la respuesta, se puede aplicar una estrategia diferente para resolver el problema y comparar las soluciones.

El área de la región sombreada se puede calcular como la suma de las áreas de las regiones 1, 2 y 3. Luego, se tiene que:

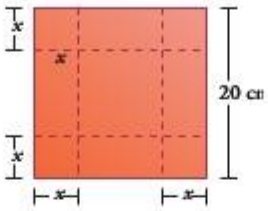
$$A = 5(x - 5) + 5(x - 5) + 5^2 = 5x - 25 + 5x - 25 + 25 = 10x - 25$$

Como las dos soluciones son equivalentes, la cantidad de material que se pierde al corregir el error está dado por la expresión $10x - 25$ cm^2.

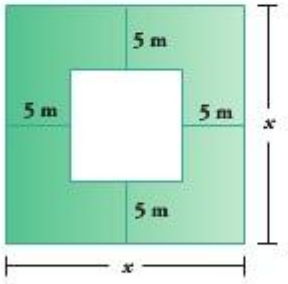
280. Una fotografía de 12 cm por 10 cm se aumenta en a cm de largo y de ancho. Determina la expresión algebraica que representa el área A de la nueva fotografía.

$A =$ _____

281. Se construyó una caja de base cuadrada a partir de un cuadrado de 20 cm de lado, recortando cuadrados de lado x en las esquinas, como se muestra en la figura. Halla una expresión para el volumen V de la caja.



282. Una capilla de forma cuadrada está construida en el centro de un terreno de forma cuadrada de lado x y está rodeada por una terraza de 5 m de ancho. Escribe la expresión que representa el área A de la terraza.

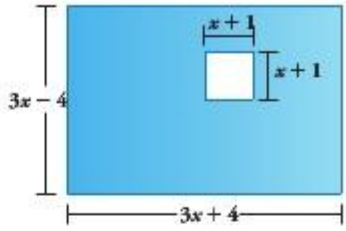


$A =$ _____

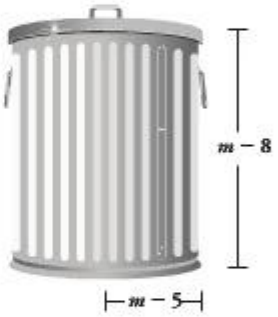
283. Una caja de madera tiene forma cúbica y está construida con láminas de madera de 2 cm de grosor sin tapa. Si su arista mide a cm, ¿cuál es la expresión que permite hallar el volumen interior de la caja?



284. Escribe un polinomio que exprese el área de la región sombreada de la figura.



285. El área superficial A_s de un recipiente cilíndrico está dada por la expresión: $A_s = 2\pi rh + 2\pi r^2$, donde h es la altura y r es el radio de la base. Determina el área superficial del siguiente recipiente.



Una empresa de aparatos electrónicos está vendiendo una nueva clase de nevera. La empresa ha calculado que por cada n neveras que son vendidas, la ganancia G está dada por la expresión:

$$G = 504.000n - 720n^2.$$

Determina la ganancia G para cada valor de n.

286. $n = x - 3$ $G =$ _____

287. $n = \frac{1}{2}x + 1$ $G =$ _____

288. El volumen de una esfera está dado por la expresión: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Determina una expresión para el volumen de un balón que tiene un radio de $3x - 4y$ cm. _____

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para saber calcular la cuota de un préstamo bancario.

Cuando una persona desea comprar una casa, un negocio, un apartamento o un carro, en ocasiones, hace una solicitud de préstamo a un banco y, al salir aprobada, se debe empezar a cancelar en cuotas mensuales durante el tiempo límite de plazo para pagar el préstamo.

Las expresiones algebraicas son útiles para encontrar el valor de cada cuota del préstamo incluyendo el interés que cobra el banco durante el período de pago.



Aparte del monto prestado, el tiempo de pago y la tasa de interés que cobra el banco, también se debe tener en cuenta la modalidad de pago. En Colombia las modalidades de pago más utilizadas son el método alemán y el método francés:

Método	Forma de pago
Alemán	Se inicia pagando cuotas altas pero a medida que se paga el préstamo van reduciendo su valor.
Francés	Todas las cuotas son fijas y se paga el mismo valor hasta el final del préstamo.

Para el método francés la expresión que permite hallar el monto de cada cuota fija para un préstamo es:

$$R = p\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Donde R es la renta o cuota, i el interés que cobra el banco mensualmente, p el monto solicitado en el préstamo y n el número de cuotas que se van a pagar.

Los productos notables son útiles ya que permiten tener una expresión general para cualquier número de cuotas y así el polinomio del interés es reducido.

Por ejemplo, para calcular la cuota fija de un préstamo de $5.000.000 a un interés del 2% para pagar en 5 cuotas, se remplazan los valores en la expresión y se resuelve así:

$$R = 5.000.000\left[\frac{0{,}02(1+0{,}02)^5}{(1+0{,}02)^5 - 1}\right]$$

$$R = 1.060.791{,}97$$

Lo que indica que el valor de cada cuota mensual que pagará el préstamo es de $1.060.791,97.

1. **El polinomio extendido que representa el valor que se va a pagar en un préstamo a dos cuotas es:**

$$R = p\left\{\frac{[i(1+2i+i^2)]}{[(1+2i+i^2)-1]}\right\}$$

Este se obtiene al remplazar $n = 2$ y resolver el producto notable del numerador y el denominador.

Encuentra el polinomio extendido usando el triángulo de Pascal para un préstamo de:

a. 4 cuotas **b.** 5 cuotas **c.** 7 cuotas

2. **Si una persona desea comprar un vehículo pero le hacen falta $3.000.000, ¿cuál es la cuota que debe pagar en un préstamo a 12 meses, con una tasa de interés del 1,5%?**

3. **La expresión que permite hallar la cuota fija para un préstamo específico es:**

$$R = p\left[\frac{i(1+3i+3i^2+i^3)}{(1+3i+3i^2+i^3)-1}\right]$$

Responde:

a. ¿Cuál es la expresión simplificada para hallar la cuota del préstamo?

b. Si n es el número de cuotas del pago del préstamo, ¿para cuántas cuotas es la expresión mostrada? Justifica tu respuesta.

4. **Consulta el interés mensual para un préstamo de libre inversión que se pague con cuota fija. Luego, encuentra la cuota mensual que deberías pagar para comprar un apartamento de $100.000.000 si pides el préstamo para cancelar en cuotas mensuales a 10 años.**

Trabaja con Algebrator

Objetivo: simplificar operaciones utilizando los productos notables y cocientes notables.

Descripción: utilizar el editor de ecuaciones que presenta el software Algebrator para verificar la validez de un producto notable o un cociente notable, por medio de los procedimientos que muestra este software.

Para acceder a la descarga del software libre Algebrator, ingresa en: depositfiles.com/es/files/eklrbeo1d

1. Descarga el archivo ejecutable: Algebrator4.exe, luego, haz doble clic para instalarlo.
2. Haz clic en **Close** para ir a la ventana de trabajo. Luego, haz clic en la opción **New** para abrir una nueva hoja de cálculo.

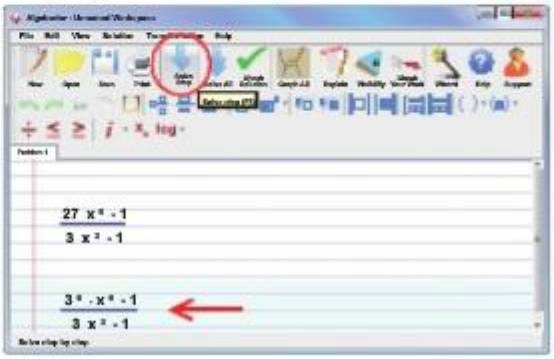


3. Observa que en la parte superior de la ventana se encuentra una fila con opciones en color azul. Este es el editor de ecuaciones que utiliza el software para la incorporación o edición de expresiones algebraicas que serán escritas en la hoja de cálculo.
4. Utiliza las herramientas del editor de ecuaciones del software para escribir el siguiente cociente notable:

$$\frac{27x^6 - 1}{3x^2 - 1}$$



5. Haz clic varias veces y lentamente sobre la opción **Solve Step**. Observa lo que genera el programa cada vez que haces un clic.



6. Haz clic sobre la opción **New** para abrir un nuevo documento llamado **Problem 2.** Escribe nuevamente el polinomio y luego, activa la opción **Solve All** y compara este resultado con el resultado trabajado con la opción **Solve Step** del paso 5.



7. Resuelve los siguientes cocientes notables en tu cuaderno. Luego, usa Algebrator para revisar tus procedimientos realizados con los del programa para desarrollar los siguientes cocientes notables:

a. $\frac{x^3 + y^3}{x + y}$

b. $\frac{x^3 - y^3}{x - y}$

c. $\frac{27n^3 + 343m^3}{3n + 7m}$

d. $\frac{16a^8 - 625b^4}{2a^2 + 5b}$



5 Factorización

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Identificar las características que debe cumplir una expresión para ser factorizada por alguno de los casos analizados.
- **Factorizar polinomios por factor común** y **factor común por agrupación de términos.**
- **Factorizar binomios** y **trinomios**, según sus características.
- **Factorizar completamente** una expresión algebraica.

Encuentra en tu Libromedia

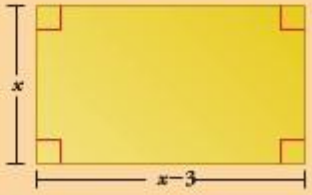
Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba Saber

2	Multimedia	**1**	Audio
1	Galería	**11**	Imprimibles
3	Actividades	**1**	Enlace web

Lo que sabes...

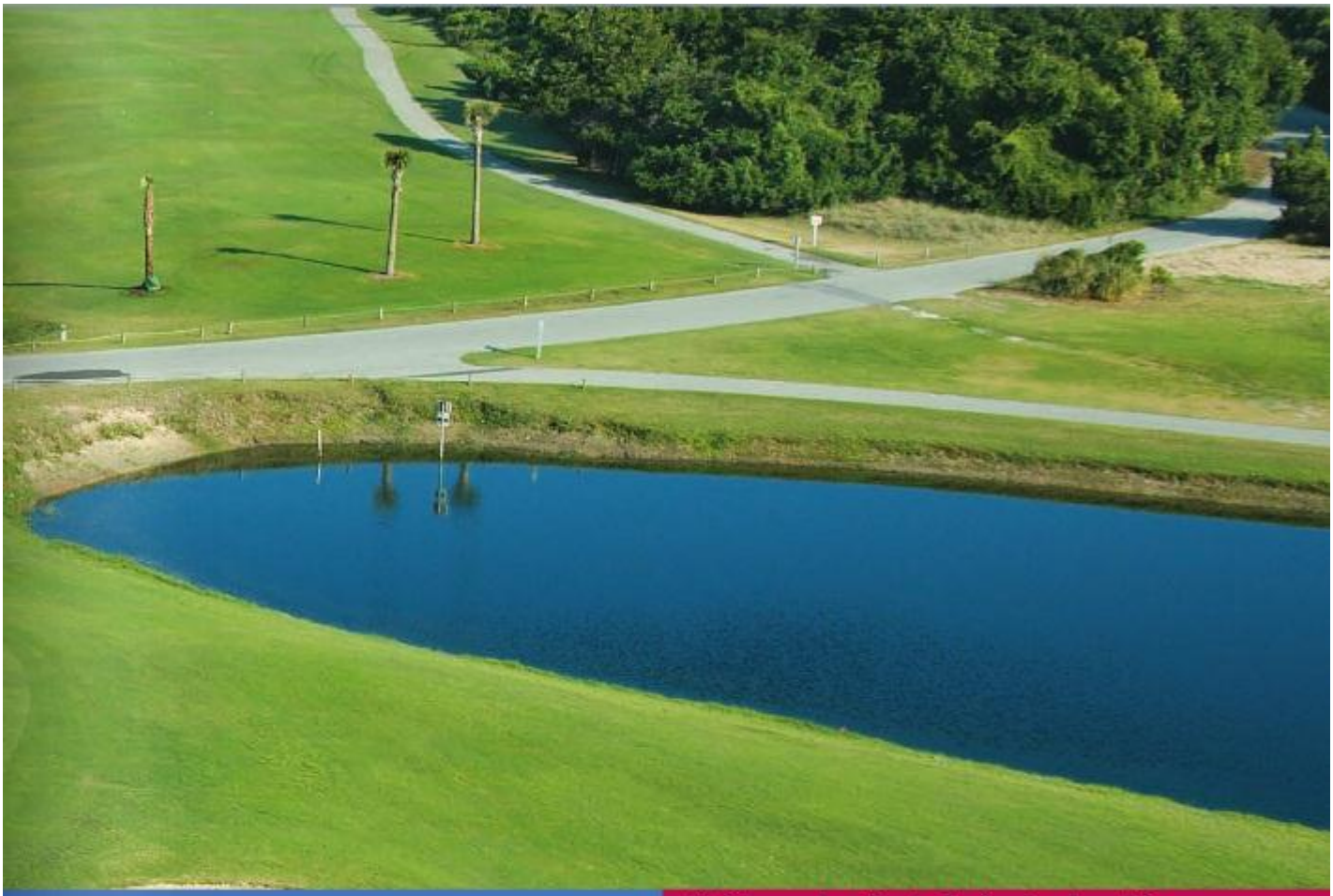
1. Aplica la propiedad distributiva y resuelve.
   - a. $2m(3m + 4n)$
   - b. $x(a + b + c)$
   - c. $4a(a^2 - a + 3)$
2. Dado el siguiente rectángulo, responde.



¿Cuál es la expresión asociada al perímetro de la figura? ¿Cuál expresión corresponde al área?

3. Realiza la descomposición de factores primos de cada número.

   a. 120 b. 240 c. 1.496



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para predecir la distancia que alcanza una pelota de golf.

La pelota de golf, al ser golpeada por el aire, genera una trayectoria especial llamada parábola.

Cada golfista se esmera en lograr un golpe perfecto. Para tal fin debe conocer la distancia a la que se encuentra el hoyo y escoger el palo indicado para lanzar la pelota lo más cerca posible del *Green*, que es la zona más próxima al hoyo.

Lee más acerca de este tema en la página 142.

Cronología de la factorización

Grecia. Utilizaron figuras geométricas para representar ecuaciones y demostrar propiedades de la adición y la multiplicación en forma de factores.



Italia. Scipione del Ferro halló una expresión para resolver ecuaciones de tercer grado valiéndose de la factorización.

300 a. C.

1515 d. C.

Francia. Fermat encontró el método de factorización que consiste en la representación de un número impar como una diferencia de dos cuadrados.

1641 d. C.

Italia. Marín Mersenne introdujo la noción de factorización cuando mostró formas diferentes de representar un número.

1643 d. C.

1809 d. C.

Europa. Se logró obtener una tabla de factores de números de hasta 10 millones gracias al método de factorización de Euler.

1910 d. C.

Italia. Paolo Ruffini creó un método fácil de dividir un polinomio entre un binomio, que permite factorizar un polinomio.



Ampliación multimedia

Recurso imprimible

1. Concepto de factorización

Factorizar un número es expresarlo como producto de dos o más factores. Por ejemplo, el número 60 se puede escribir como:

$$60 = 12 \cdot 5 \text{ o } 60 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \text{ o } 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Luego, la factorización de un número es expresar el número como producto de factores primos. Para el caso de 60, se tiene $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. A los números que se pueden expresar como producto de factores primos diferentes a él, se les llama números compuestos.

Al igual que los números compuestos, existen polinomios compuestos. Es decir, polinomios que se pueden expresar como producto de polinomios más simples. Este proceso se denomina factorización de polinomios.

Factorizar un polinomio, significa descomponerlo en factores primos que son polinomios, diferentes a él.

Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 5x + 6$ se factoriza como $(x + 3)(x + 2)$, ya que al realizar el producto $(x + 3) \cdot (x + 2)$ se obtiene $x^2 + 5x + 6$.

Todo polinomio que no se puede expresar como producto de polinomios más simples, se llama **polinomio primo**.

Por ejemplo, el polinomio $2x - 5y + 32$ es un polinomio primo, porque no existen polinomios diferentes a él, tales que su producto sea igual a $2x - 5y + 32$.

EJEMPLOS

1. Determinar si los siguientes polinomios son primos o compuestos.

a. $4m^3n^5$

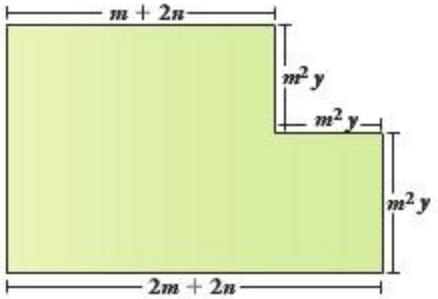
$4m^3n^5$ es un monomio compuesto, ya que se puede expresar como:

$4m^3n^5 = (4m) \cdot (m^2n) \cdot (n^4)$.

b. $x^2 + 4y$

$x^2 + 4y$ es un polinomio primo, ya que no se puede expresar como producto de polinomios más simples.

2. Determinar si las medidas del siguiente terreno son expresadas con polinomios primos o compuestos.



$2m + 2n$ y m^2y son polinomios compuestos y $m + 2n$ es un polinomio primo.

Historia de las matemáticas



El método de factorización de Fermat consiste en expresar un número natural impar n como la diferencia de dos cuadrados.

$n = a^2 - b^2$

Esta diferencia es igual a $(a + b)(a - b)$; si ninguno de estos factores es igual a 1, se trata de una factorización propia de n. Luego, si n es impar y $n = cd$, es una factorización de n, entonces

$$n = \left(\frac{c + d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c - d}{2}\right)^2.$$

2. Factorización de monomios

La **factorización de un monomio** consiste en expresarlo como el producto de dos o más monomios.

Por ejemplo, $7m^4$ se puede factorizar así:

$$7m^4 = (7m) \cdot (m^3)$$

En algunos casos, un monomio puede tener más de una factorización.

Por ejemplo, el monomio $7m^4$: también se puede expresar como

$$7m^4 = (7m^2) \cdot (m^2)$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Responde.

1. ¿Qué es un número compuesto?
2. ¿Cómo se define un polinomio primo?
3. ¿Cuál es el significado de factorizar un polinomio?
4. ¿De cuántas formas se puede factorizar el monomio $10x^2y$?

Realiza la factorización de cada uno de los siguientes números.

5. 90
6. 120
7. 425
8. 338
9. 240
10. 360
11. 840
12. 1.600
13. 4.641

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

14. Todo polinomio simple es un polinomio primo. ( )
15. Los monomios de grado absoluto mayor que 1 se pueden factorizar de dos formas distintas. ( )
16. El polinomio $2x + y$ es primo. ( )
17. El polinomio $5 + n^2$ se puede factorizar como $5 + n^2 = n^2\left(\frac{5}{n} + 1\right)$. ( )

Encuentra el máximo común divisor de cada par de números.

18. 18 y 21
19. 42 y 35
20. 120 y 75
21. 60 y 48
22. 180 y 450
23. 300 y 250

Realiza tres factorizaciones para cada monomio.

24. $8m^2n^3$
25. $-21a^4b$
26. $5p^6q^4$
27. $6c^6d^2$
28. $24ab^3n^2$
29. $-\frac{4}{25}x^3y$

Encuentra los factores que faltan en cada arreglo para que el producto de los monomios sea el indicado.

30. $-\frac{27}{30}x^6y^5$

xy^3	
$\frac{9}{10}x^3$	$-3y$

31. $\frac{25}{4}a^8b^3$

$5b$	
$\frac{1}{2}a$	$-\frac{1}{2}a^4b$

Determina dos monomios diferentes, tales que tengan como factor la expresión indicada.

32. $2a^2b$
33. $-10c^3$
34. $22m^2n$
35. $8xy$
36. $-\frac{1}{5}nm^5$
37. $-\frac{4}{18}u^2y$

Determina dos polinomios diferentes, que tengan como factor el polinomio indicado.

38. $x + 1$
39. $2x - y$
40. $n + 4$
41. $2x - 3$
42. $3x + 8$
43. $2x^2 + y^3$
44. $2 + 5z$
45. $-16 + y$

3. Factorización por factor común

Algunos polinomios tienen una expresión común en cada uno de sus términos, esta puede ser numérica o literal (variable). A esta expresión se le denomina **factor común**.

La factorización de un polinomio por factor común está relacionada con la propiedad distributiva.

Por ejemplo, para factorizar el polinomio $ax + ay$, se sigue:

$$ax + ay = a \cdot (x + y)$$

Factor común — $(ay \div a)$ — $(ax \div a)$

Por tanto, la factorización del polinomio $ax + ay$ es $a(x + y)$.

Matemáticamente

Escribe dos polinomios diferentes que tengan el mismo factor común.

3.1 Factor común monomio

El **factor común monomio** es el producto del máximo común divisor de los coeficientes de todos los términos por las variables comunes de todos los términos con sus respectivos exponentes mínimos.

Para factorizar un polinomio por factor común monomio, es necesario realizar los siguientes pasos:

- **Primero,** se halla el factor común, considerando sus características.
- **Segundo,** se divide cada término del polinomio dado entre el factor común extraído.
- **Por último,** se escribe el factor común y, dentro de un paréntesis, se escriben los resultados de cada división.

EJEMPLOS

1. Factorizar los siguientes polinomios mediante factor común monomio.

a. $6a - 15b$

El factor común es 3, ya que 3 es mcd de 6 y 15.

Por tanto,

$$6a - 15b = 3 \cdot (2a - 5b)$$

b. $12x^3y - 30x^2y^2 + 42x^3y^4$

El factor común es $6x^2y$, ya que 6 es el mcd de 12, 30 y 42 y x^2y corresponde a las variables comunes x, y con su menor exponente.

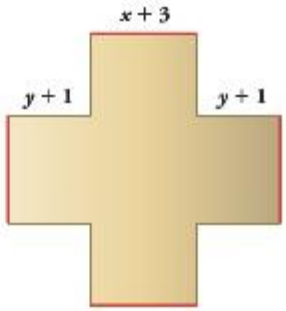
Por tanto,

$12x^3y - 30x^2y^2 + 42x^3y^4 = 6x^2y(2x - 5y + 7xy^3)$

c. $21m^2n - 3m^2n^3 + 7m^4n^2$

El factor común es m^2n, luego la factorización es $21m^2n - 3m^2n^3 + 7m^4n^2 = m^2n(21 - 3n^2 + 7m^2n)$.

2. Escribir, en forma factorizada, el perímetro de la siguiente figura.



El polinomio que expresa el perímetro de la figura es $4x + 8y + 20$.

Luego, el factor común es 4.

Por tanto, la forma factorizada del perímetro de la figura es:

$$4 \cdot (x + 2y + 5)$$

3.2 Factor común polinomio

Recurso imprimible

En algunos polinomios existen factores comunes que no son monomios sino polinomios.

Por ejemplo, en el polinomio $m(m + n) - n^2(m + n)$, se observan dos expresiones separadas por un signo $-$, $m(m + n)$ y $n^2(m + n)$, en el cual $(m + n)$ es el factor común.

Para factorizar esta clase de polinomios por factor común polinomio se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se extrae el factor común de las expresiones del polinomio, teniendo en cuenta que el factor está compuesto por más de un monomio.
- **Segundo,** se divide cada expresión del polinomio dado por el factor común extraído.
- **Por último,** se escribe la factorización del polinomio propuesto.

Por tanto, la factorización de $m(m + n) - n^2(m + n)$ es.

$$m(m + n) - n^2(m + n) = (m + n)(m - n^2)$$

Factor común polinomio

$n^2(m + n) \div (m + n)$

$m(m + n) \div (m + n)$

Matemáticamente

¿Por qué son equivalentes las siguientes expresiones?

$-2x^3 + y^2$ y $-(2x^3 - y^2)$

EJEMPLOS

1. Identificar el factor común de cada expresión.

a. $m(m + 1) + b(m + 1)$

El factor común es $m + 1$.

b. $3(x^2 + x + 1) + 2n(x^2 + x + 1) - 5n^2(x^2 + x + 1)$

El factor común es $x^2 + x + 1$.

c. $(x + y)(n + 2) + (m + 2)(n + 2) + (5y)(n + 2)$

El factor común es $n + 2$.

d. $w(t + 1) + (w + 2)(t + 1) - (t + 1)$

El factor común es $t + 1$.

2. Factorizar por factor común polinomio.

a. $x(y + 2) + (y + 2)$

En el polinomio $x(y + 2) + (y + 2)$, el factor común polinomio es $(y + 2)$. Por tanto, la factorización del polinomio es:

$x(y + 2) + (y + 2) = (y + 2)(x + 1)$

b. $-3xm(x + y) + 6m^2(x + y) - 12m^3(x + y)$

En el polinomio $-3xm(x + y) + 6m^2(x + y) - 12m^3(x + y)$ se pueden apreciar dos factores distintos: $(x + y)$ que es el factor común polinomio de las expresiones, además del factor $3m$ que corresponde al factor común de $3xm$, $6m^2$ y $12m^3$.

Luego, la factorización es:

$$-3xm(x + y) + 6m^2(x + y) - 12m^3(x + y) = 3m(x + y)(-x + 2m - 4m^2)$$
$$= -3m(x + y)(x - 2m + 4m^2)$$

Por tanto, $-3xm(x + y) + 6m^2(x + y) - 12m^3(x + y) = -3m(x + y)(x - 2m + 4m^2)$

Recurso imprimible

3.3 Factor común por agrupación de términos

En algunos casos, en el polinomio que se busca factorizar no hay un factor común para todos sus términos, pero al agrupar estos sí se puede determinar una expresión común para cada agrupación.

Por ejemplo, en el polinomio $am + bm + an + bn$, no hay un factor común en todos sus términos. Sin embargo, al organizar el polinomio en grupos de términos, es posible encontrar un factor común en cada agrupación y así determinar un factor común para el polinomio.

Matemáticamente

¿Cómo puedes encontrar un polinomio de grado 3 tal que uno de sus factores sea $x^2 + 1$?

Luego, al factorizar el polinomio $am + bm + an + bn$, se tiene:

$am + bm + an + bn = (am + an) + (bm + bn)$ Se agrupan los términos.

$= a(m + n) + b(m + n)$ Se factoriza cada paréntesis por factor común.

$= (m + n)(a + b)$ Se factoriza por factor común polinomio.

Por tanto, $am + bm + an + bn = (m + n)(a + b)$.

EJEMPLOS

Factorizar los siguientes polinomios.

a. $x^4 - y + xy - x^3$

$x^4 - y + xy - x^3$ Polinomio dado.

$= (x^4 - x^3) + (xy - y)$ Se agrupan los términos.

$= x^3(x - 1) + y(x - 1)$ Se factoriza cada paréntesis por factor común.

$= (x - 1)(x^3 + y)$ Se factoriza por factor común polinomio.

Por tanto, $x^4 - y + xy - x^3 = (x - 1)(x^3 + y)$.

b. $4r^5 - 6r^4 + 2r^3 + 2r^2 - 3r + 1$

$4r^5 - 6r^4 + 2r^3 + 2r^2 - 3r + 1$ Expresión dada.

$= (4r^5 - 6r^4 + 2r^3) + (2r^2 - 3r + 1)$ Se agrupan los términos.

$= 2r^3(2r^2 - 3r + 1) + (2r^2 - 3r + 1)$ Se factoriza cada paréntesis por factor común.

$= (2r^2 - 3r + 1)(2r^3 + 1)$ Se factoriza por factor común polinomio.

Por tanto, la factorización del polinomio $4r^5 - 6r^4 + 2r^3 + 2r^2 - 3r + 1$ es:

$(2r^3 + 1)(2r^2 - 3r + 1)$.

c. $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$

$4a^3 - 1 - a^2 + 4a$ Expresión dada.

$= (4a^3 - a^2) + (-1 + 4a)$ Se agrupan los términos.

$= a^2(4a - 1) + (-1 + 4a)$ Se factoriza el primer paréntesis por factor común.

$= a^2(4a - 1) + (4a - 1)$ Se ordena el segundo paréntesis.

$= (4a - 1)(a^2 + 1)$ Se factoriza por factor común polinomio.

Por tanto, la factorización del polinomio $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$ es $(4a - 1)(a^2 + 1)$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Responde.

46. ¿Por qué el factor común está relacionado con la propiedad distributiva?

47. ¿Cuáles son los pasos para factorizar un polinomio por factor común polinomio?

48. ¿Cuáles son los posibles casos para aplicar la factorización por factor común?

Escribe dos monomios de diferente grado, cuyo factor común sea el monomio indicado.

49. $4a^2b$

50. $-12xy^3$

51. $7m^2np^3$

52. $\frac{2}{5}x^4y$

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

53. No existen polinomios que tengan una expresión algebraica común. ( )

54. Todos los factores comunes de un polinomio son monomios. ( )

55. No es posible que el coeficiente de un factor común sea un número racional. ( )

56. Para factorizar un polinomio por agrupación de términos, este debe tener una cantidad par de términos. ( )

Encuentra el factor común entre las expresiones indicadas en cada caso.

57. $2p^2q$ y $3pq^2$

58. $18a^3b^2$, $-12a^5b^3$ y $48a^2b^4$

59. $-9w^3x^4y^2$, $45w^2x$ y $25x^2y$

Factoriza los siguientes polinomios.

60. $3a - 12ab$

61. $2ab + 2ac + 2ad$

62. $26x^2y^6 - 13x^6y^2 + 169x^2y^2$

63. $150m^2n^2 - 240mn^6 - 360m^3n^2$

64. $25x^2yz + 30xy^2z - 60x^3yz^2$

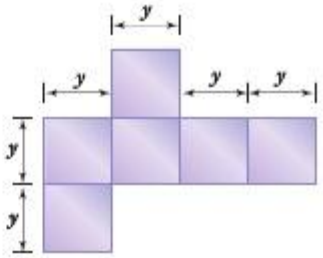
65. $4m^3y + 5x^2m - 8xmy + 7x^2m^2y^2$

66. $-6t^2w + 12tw^2 - 3t^2w + 6tw$

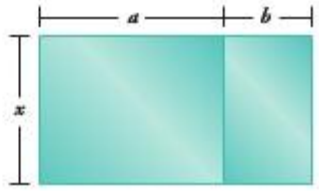
67. $-\frac{1}{2}tz^2 + \frac{1}{4}tz^3 - \frac{1}{8}tz^4$

Escribe en forma factorizada el polinomio que representa el área de cada figura.

68.



69.



Factoriza los siguientes polinomios.

70. $x(y + 1) - 3(y + 1)$

71. $a(b - 1) + c(b - 1)$

72. $x(w^2 - a^2) + 2(w^2 - a^2)$

73. $m(a - c) + a - c$

74. $b(a + 1) - a - 1$

75. $1 - b + 2a(1 - b)$

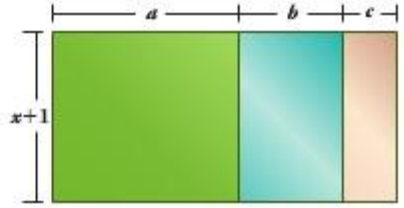
76. $(a + 3)(a + 1) - 4(a + 1)$

77. $m(n - 2) + 2 - n$

78. $(1 + 3n)(m + 1) - 2n(m + 1) + 3(m + 1)$

79. $c(x - 3y) + d(3y - x)$

Observa la figura y resuelve.



80. Escribe el polinomio que representa el área de la figura.

81. Expresa el polinomio que representa el área en forma factorizada.

E **Factoriza cada expresión por factor común por agrupación de términos.**

82. $a^2 + ab + ax + bx$

83. $am - bm + an - bn$

84. $ax - 2bx - 2ay + 4by$

85. $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$

86. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$

87. $abc - 2abcn - xy + 2xyn$

88. $6ax - 3a - 1 + 2x$

89. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$

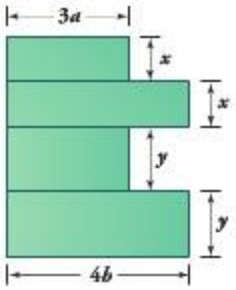
90. $a^3 + a^2 + a + 1 + x^2 + a^2x^2$

91. $2ac + 2ad - 3bc - 3bd$

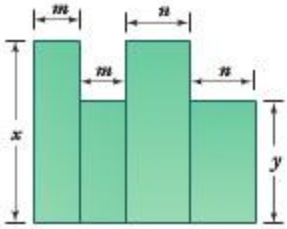
92. $3m^2 - 7x^2y + 3my - 7mx^2$

R **Escribe como producto de polinomios el área de cada figura.**

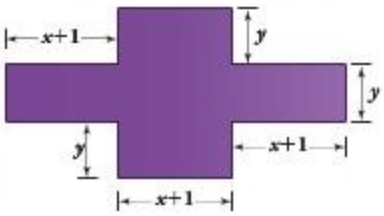
93.



94.



95.



R **Lee y resuelve.**

96. Si el área de un rectángulo es equivalente al polinomio $xy + x + y + 1$, ¿cuál es la longitud del largo y del ancho si $x = 3$ y $y = 1$?

Encuentra un polinomio que cumpla la condición dada.

97. Con 2 términos y factor común $4x^2$.

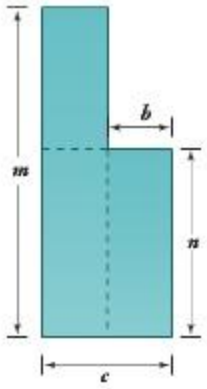
98. Con 2 términos y factor común $2m$.

99. Con 3 términos y factor común $-5a^2b$.

100. Con 4 términos y factor común $(2x - 1)$.

101. Con 6 términos y factor común $2(a^3 - b^2)$.

Observa la figura y sus medidas.



102. Escribe un problema que implique la factorización de polinomios.

S **Lee y resuelve.**

Dos grupos de estudiantes realizarán una visita al parque de diversiones.



Si el total de estudiantes del grupo A es a, la cantidad de estudiantes del grupo B es b, y el costo por estudiante es t, responde.

103. ¿Cuál es el costo del total de estudiantes por ir al parque de diversiones? Expresa la solución como la factorización de un polinomio.

4. Factorización de binomios

En la **factorización de binomios** se aplican los productos y cocientes notables estudiados en la unidad anterior.

4.1 Factorización de la diferencia de cuadrados

Recurso imprimible

En los productos notables, cuando se multiplica la suma de dos términos por su respectiva diferencia, se obtiene el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término, es decir $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Esto indica que la diferencia de dos cuadrados se puede escribir como el producto de dos factores.

Para identificar cuándo un binomio es la diferencia de dos cuadrados, se verifican las siguientes condiciones.

- El binomio debe tener dos términos, separados por el signo menos.
- Los dos términos deben estar elevados al cuadrado, es decir, se les puede extraer la raíz cuadrada exacta.

Por ejemplo, la expresión $100m^2 - 81n^2$ es un binomio formado por una diferencia de cuadrados, en ella se identifican los dos términos separados por el signo menos y al extraer las raíces cuadradas de sus términos resultan ser exactas.

$$\sqrt{100m^2} = 10m \qquad \sqrt{81n^2} = 9n$$

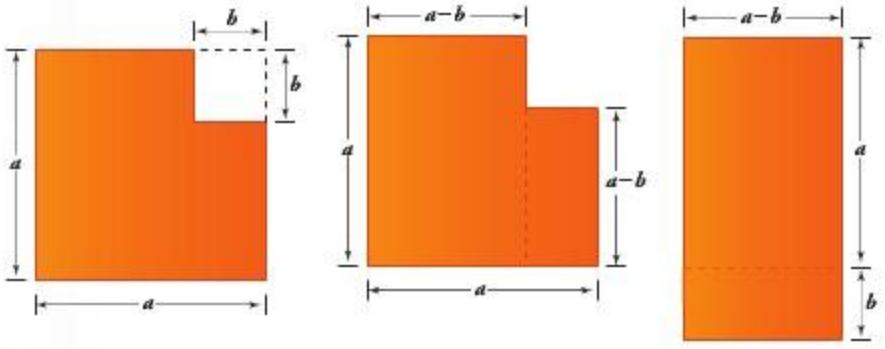
La **diferencia de cuadrados** se factoriza como la suma de las raíces cuadradas de los dos términos por la diferencia de las raíces cuadradas de los dos términos.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Así, la factorización de $100m^2 - 81n^2$ es:

$$100m^2 - 81n^2 = (10m + 9n)(10m - 9n)$$

La representación geométrica de la factorización de $a^2 - b^2$, es expresar el área determinada por $a^2 - b^2$, en un rectángulo de igual área como se muestra a continuación.



Se observa que el área de la izquierda es igual al área de la figura de la derecha. Esto es:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

EJEMPLOS

Factorizar los siguientes binomios.

a. $4a^2b^2 - 9x^6y^8$

El binomio $4a^2b^2 - 9x^6y^8$ es una diferencia de cuadrados. Para su factorización, se determinan las raíces cuadradas de $4a^2b^2$ y $9x^6y^8$. Así:

$\sqrt{4a^2b^2} = 2ab \quad \sqrt{9x^6y^8} = 3x^3y^4$

Por tanto, la factorización de $4a^2b^2 - 9x^6y^8$ es

$4a^2b^2 - 9x^6y^8 = (2ab + 3x^3y^4)(2ab - 3x^3y^4)$

b. $\frac{16}{25} - 169x^{10}$

Las raíces de sus términos son:

$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \qquad \sqrt{169x^{10}} = 13x^5$

Luego, la factorización es:

$\frac{16}{25} - 169x^{10} = \left(\frac{4}{5} + 13x^5\right)\left(\frac{4}{5} - 13x^5\right)$

c. $9x^2 - 5$

Las raíces de sus términos son:

$\sqrt{9x^2} = 3x \qquad \sqrt{5} = \sqrt{5}$

Luego, la factorización es:

$9x^2 - 5 = (3x + \sqrt{5})(3x - \sqrt{5})$

d. $x^{2n} - y^{2m}$

Las raíces de sus términos son

$\sqrt{x^{2n}} = x^n \qquad \sqrt{y^{2m}} = y^m$

Luego, la factorización es:

$x^{2n} - y^{2m} = (x^n + y^m)(x^n - y^m)$

e. $-m^2 - n^2$

$-m^2 - n^2$ no es una diferencia de cuadrados pues aunque m^2 y n^2 son cuadrados, el signo de m^2 es negativo.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito

Responde.

104. ¿Cuáles son las condiciones para factorizar una diferencia de cuadrados?

105. ¿Cómo se factoriza el binomio $x^2 - a$?

106. ¿Es posible factorizar $-25 + a^2$ por factorización de diferencia de cuadrados?

107. Completa la tabla.

Expresión	Raíz cuadrada de la expresión
$9a^2b^6$	
$144x^8y^{12}z^{16}$	
$(4 + b^2)^2$	
$(2a - 3b^4 + 1)^4$	

Indica cuáles polinomios son diferencias de cuadrados. Luego, factorízalos.

108. $9a^2 - 25b^4$

109. $m^2 - n^4$

110. $2 - b^2$

111. $\frac{1}{100} + c^2$

112. $z^2 - 81u^6$

113. $x^2 - 100$

114. $-25 + 49x^{16}$

115. $\frac{36}{49} - x^{6n}$

Factoriza cada binomio. Explica tu respuesta.

116. $36m^2 - 81y^2$

117. $1 - (x - 2y)^2$

118. $9x^{\frac{4}{7}} - 4x^{8m-2y}$

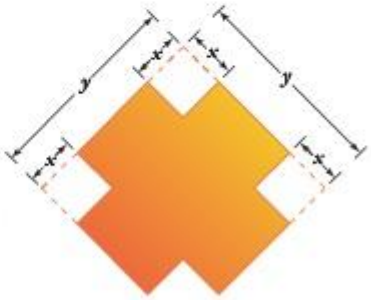
119. $\frac{100}{169}m^2n^6 - \frac{225t^4y^{6n}}{a^4b^6}$

120. $64(x + y)^2 - 121(x - 2)^2$

121. $\frac{(3x - 4y^2)^8}{225} - t^{4n}$

122. $25m^{2n} - (3x + 2y)^4$

123. Expresa en forma factorizada el área sombreada de la siguiente figura.



4.2 Factorización de la suma y la diferencia de cubos

Recurso imprimible

A partir del estudio de los cocientes notables, se tiene que:

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2 \qquad \frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$$

Además, como las expresiones anteriores son cocientes exactos en cada una de ellas se verifica:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Es decir, la suma o la diferencia de cubos perfectos, se puede expresar como el producto de dos factores.

Factorización de la suma de cubos

La expresión de la forma x^3+a^3 se denomina suma de cubos y en ella se identifican las siguientes características:

- Sus términos tienen igual signo.
- Cada uno de sus términos tiene raíz cúbica exacta.

La **suma de cubos** se descompone en dos factores, el primer factor contiene la suma de las raíces cúbicas de cada término y el segundo factor es un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz cúbica, menos el producto de las raíces cúbicas, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica, es decir:

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2).$$

EJEMPLOS

Factorizar cada binomio.

a. $27x^3+8y^6z^9$

$\sqrt[3]{27x^3}=3x \qquad \sqrt[3]{8y^6z^9}=2y^2z^3$ Se extrae la raíz cúbica de cada término.

$(3x+2y^2z^3)[(3x)^2-(3x)(2y^2z^3)+(2y^2z^3)^2]$ Se factoriza por suma de cubos.

$=(3x+2y^2z^3)(9x^2-6xy^2z^3+4y^4z^6)$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, $27x^3+8y^6z^9=(3x+2y^2z^3)(9x^2-6xy^2z^3+4y^4z^6)$.

b. $343m^6+64n^{12}$

$\sqrt[3]{343m^6}=7m^2 \qquad \sqrt[3]{64n^{12}}=4n^4$ Se extrae la raíz cúbica de cada término.

$(7m^2+4n^4)[(7m^2)^2-(7m^2)(4n^4)+(4n^4)^2]$ Se factoriza por suma de cubos.

$=(7m^2+4n^4)(49m^4-28m^2n^4+16n^8)$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, $343m^6+64n^{12}=(7m^2+4n^4)(49m^4-28m^2n^4+16n^8)$.

c. $125m^{6n}+1$

$\sqrt[3]{125m^{6n}}=5m^{2n} \qquad \sqrt[3]{1}=1$ Se extrae la raíz cúbica de cada término.

$(5m^{2n}+1)[(5m^{2n})^2-(5m^{2n})(1)+1^2]$ Se factoriza por suma de cubos.

$=(5m^{2n}+1)(25m^{4n}-5m^{2n}+1)$ Se resuelven operaciones.

Luego, $125m^{6n}+1=(5m^{2n}+1)(25m^{4n}-5m^{2n}+1)$.

Historia de las matemáticas

Hardy-Ramanujan



"Una vez, en un taxi de Londres, a Hardy le llamó la atención su número 1.729, cuando llegó a visitar a Ramanujan en el hospital, Hardy le manifestó que tal número era aburrido, el cual obtuvo una respuesta inmediata de Ramanujan, es un número muy interesante, ya que es el número más pequeño que se puede expresar como suma de dos cubos de dos formas diferentes. Matemáticamente si 1.729, es igual a 13 por 133 y 19 por 91, ¿cómo se puede expresar 1.729 por suma de cubos?"

Recurso imprimible

Factorización de la diferencia de cubos

La expresión de la forma $x^3 - a^3$ se denomina diferencia de cubos y en ella se identifican las siguientes características:

- Sus términos tienen diferente signo.
- Cada uno de sus términos tiene raíz cúbica exacta.

La **diferencia de cubos** se descompone en dos factores, el primer factor contiene la diferencia de las raíces cúbicas de cada término y el segundo factor es un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz cúbica, más el producto de las raíces cúbicas, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica, es decir, $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

Matemáticamente

¿Por qué $x^6 - y^6$ puede ser factorizado como una diferencia de cuadrados y como una diferencia de cubos?

EJEMPLOS

1. Identificar las expresiones que corresponden a diferencia de cubos.

a. $-1 - a^3$

No es una diferencia de cubos ya que los términos tienen igual signo.

b. $125x^3 - y^3$

Esta expresión corresponde a una diferencia de cubos, ya que los signos de sus términos son diferentes, además.

$\sqrt[3]{125x^3} = 5x \qquad \sqrt[3]{y^3} = y$

2. Factorizar cada binomio.

a. $m^3 - 64$

$\sqrt[3]{m^3} = m \qquad \sqrt[3]{64} = 4$ Se extrae la raíz cúbica de cada término.

$(m - 4)(m^2 + 4m + 4^2)$ Se factoriza.

$(m - 4)(m^2 + 4m + 16)$ Se realizan las operaciones.

Por tanto, $m^3 - 64 = (m - 4)(m^2 + 4m + 16)$.

b. $512a^{12} - 8b^{15}$

$\sqrt[3]{512a^{12}} = 8a^4 \qquad \sqrt[3]{8b^{15}} = 2b^5$ Se extrae la raíz cúbica de cada término.

$(8a^4 - 2b^5)[(8a^4)^2 + (8a^4)(2b^5) + (2b^5)^2]$ Se factoriza.

$= (8a^4 - 2b^5)(64a^8 + 16a^4b^5 + 4b^{10})$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, $512a^{12} - 8b^{15} = (8a^4 - 2b^5)(64a^8 + 16a^4b^5 + 4b^{10})$.

c. $x^{3m+6} - \frac{y^3}{27}$

$\sqrt[3]{x^{3m+6}} = x^{m+2} \quad \sqrt[3]{\frac{y^3}{27}} = \frac{y}{3}$ Se extrae la raíz cúbica de cada término.

$\left(x^{m+2} - \frac{y}{3}\right)\left[(x^{m+2})^2 + (x^{m+2})\left(\frac{y}{3}\right) + \left(\frac{y}{3}\right)^2\right]$ Se factoriza.

$\left(x^{m+2} - \frac{y}{3}\right)\left(x^{2m+4} + \frac{x^{m+2}y}{3} + \frac{y^2}{9}\right)$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, $x^{3m+6} - \frac{y^3}{27} = \left(x^{m+2} - \frac{y}{3}\right)\left(x^{2m+4} + \frac{x^{m+2}y}{3} + \frac{y^2}{9}\right)$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Completa cada uno de los siguientes enunciados.

124. En la factorización de una suma de cubos, uno de los factores corresponde con la _____ de las raíces _____ de los términos.

125. El segundo factor en la factorización de una diferencia de cubos es el _____ de la primera raíz, _____ el _____ de las raíces, más el cuadrado de la segunda _____.

Factoriza según corresponda.

126. $1 - 8a^3b^3 =$ _____

127. $125m^6 - 343n^3 =$ _____

128. $8x^4 + 27xy^{3n} =$ _____

129. $\frac{a^9}{64} - \frac{b^3}{343} =$ _____

130. $\frac{c^{3m}}{1.331} + 1.000 =$ _____

131. $512t^6 - 8m^3 =$ _____

Lee y resuelve.

132. Combina la suma o diferencia de cubos con la diferencia de cuadrados, para factorizar completamente la expresión $x^{6n} - y^{6n}$.

Encuentra los errores cometidos en las siguientes factorizaciones. Luego corrígelos.

133. $216m^3 + 1.331 =$

$(6m - 11)(36m^2 + 66m + 121)$

134. $\frac{m^{3n}}{8} - \frac{1}{27} = \left(\frac{m^n}{2} - \frac{1}{9}\right)\left(\frac{m^{2n}}{4} + \frac{m^n}{18} + \frac{m^n}{9}\right)$

135. $64 - 125n^6 = (5n^2 - 4)(25n^4 + 20n^2 + 16)$

136. $y^3 + 1.728 = (y + 12)(y^2 + 24y + 144)$

137. $1 - 1.000m^3 = (1 - 10m)(1 - 10m + 100m^2)$

Utiliza las propiedades de la potenciación y de la radicación para factorizar las siguientes expresiones, como si fuesen sumas o restas de cubos. Justifica tus procedimientos.

138. $8 - x^3$

139. $y^3 + 2$

140. $10x^3 + 1$

141. $\frac{8}{27}m^{3n} - \frac{4}{1.331}$

142. ¿Por qué crees que es posible factorizar una suma de cubos y no es posible factorizar una suma de cuadrados?

Dada la factorización, encuentra el polinomio que la genera.

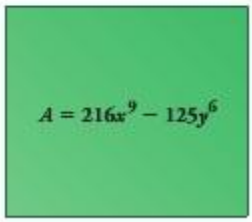
143. $(3m - 10n)(9m^2 + 30mn + 100n^2)$

144. $\left(2x^2 + \frac{y}{2}\right)\left(4x^4 - x^2y + \frac{y^2}{4}\right)$

145. $(13z^a + 11w)(169z^{2a} - 143z^aw + 121w^2)$

Lee, observa y resuelve.

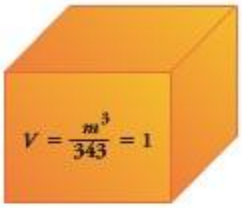
146. Encuentra las posibles dimensiones de este rectángulo, teniendo en cuenta su área.



147. Encuentra las dimensiones en el caso $x = 2$; $y = 1$.

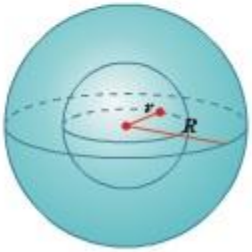
Resuelve.

148. Teniendo en cuenta que el volumen de un paralelepípedo es $B \cdot h$, encuentra posibles expresiones para el área de la base y la altura de la caja.



149. El volumen de una esfera viene dado por la expresión $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio.

Encuentra una expresión factorizada para el volumen de la esfera hueca de la gráfica.



4.3 Factorización de la suma o la diferencia de potencias de igual base

Actividad

Historia de las matemáticas

El último teorema de Fermat

La ecuación $x^n + y^n = c^n$ no tiene soluciones enteras positivas para $n > 2$

Los binomios de la forma $x^n \pm a^n$ se denomina suma o diferencia de potencias de igual exponente. Para factorizar estos binomios se debe tener en cuenta si el binomio es una suma o diferencia y si el exponente es par o impar. Además, se consideran los siguientes cocientes notables:

$\frac{x^n + a^n}{x + a}$, $x^n + a^n$ es divisible entre $x + a$, si y sólo si n es impar.

$\frac{x^n + a^n}{x - a}$, $x^n + a^n$ nunca es divisible entre $x - a$.

$\frac{x^n - a^n}{x + a}$, $x^n - a^n$ es divisible entre $x + a$, si y sólo si n es par.

$\frac{x^n - a^n}{x - a}$, $x^n - a^n$ es divisible entre $x - a$, para cualquier valor de n.

En general, las expresiones de la forma $x^n \pm a^n$, se pueden factorizar así:

- La factorización se expresa como el producto de dos factores.
- El primer factor es de la forma $x \pm a$.
- El segundo factor es un polinomio con n términos con las siguientes características.
- El primer término es x^{n-1} y el último es a^{n-1}.
- Los otros términos son productos de potencias de x y a en donde los exponentes de x disminuyen de uno en uno a partir del primer término, y los exponentes de a aumentan de uno en uno a partir del segundo término.
- Si $x - a$ es factor de $x^n - a^n$ los signos del segundo factor son todos positivos.
- Si $x + a$ es factor de $x^n + a^n$ los signos del segundo factor se alternan $+, -, +\ldots$

La factorización de $x^n \pm a^n$ es:

$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots + a^{n-1})$, si n es impar.

$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + a^{n-1})$

$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots - a^{n-1})$, si n es par.

Por ejemplo, para factorizar el binomio $x^7 + y^7$ se tiene en cuenta que:

$$\frac{x^7 + y^7}{x + y} = x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6$$

Entonces, la factorización de la expresión es:

$x^7 + y^7 = (x + y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$

En este caso se puede observar que en la expresión factorizada:

- Los términos del binomio son las raíces séptimas de los términos del binomio dado. El polinomio contiene tantos términos como lo indica el exponente de la expresión que se va a factorizar.
- Tanto el primer término como el último tienen por exponente la expresión $n - 1$, es decir, $7 - 1 = 6$.
- Los exponentes de los términos en el segundo paréntesis disminuyen respecto a una variable y aumentan respecto a la otra.

EJEMPLOS

Factorizar los siguientes binomios.

a. $a^5 - b^{10}$

Como $a^5 - b^{10}$ es divisible entre $a - b^2$, donde a es la raíz quinta de a^5 y b^2 es la raíz quinta de b^{10}.

Luego, $a - b^2$ es un factor de $a^5 - b^{10}$, se tiene:

$$a^5 - b^{10} = (a - b^2)(a^4 + a^3b^2 + a^2(b^2)^2 + a(b^2)^3 + (b^2)^4)$$
$$= (a - b^2)(a^4 + a^3b^2 + a^2b^4 + ab^6 + b^8)$$

Se observa que las potencias de a van disminuyendo desde 4 y las potencias de b van aumentando hasta 8, de dos en dos.

Los signos del segundo factor son positivos, por ser el primer factor la diferencia $a - b^2$.

b. $81 - y^4$

Como $81 - y^4$ es divisible entre $3 - y$ y $3 + y$, ya que el exponente es par y $3^4 = 81$. Luego, el binomio se puede factorizar de dos formas:

$$81 - y^4 = (3 - y)(3^3 + 3^2y + 3y^2 + y^3)$$
$$= (3 - y)(27 + 9y + 3y^2 + y^3)$$

En este caso, las potencias de 3 decrecen desde 3 y la potencias de y crecen hasta 3. Además, los signos del segundo factor son positivos.

$$81 - y^4 = (3 + y)(3^3 - 3^2y + 3y^2 - y^3)$$
$$= (3 + y)(27 - 9y + 3y^2 - y^3)$$

En este caso, las potencias de 3 decrecen y la potencias de y crecen.

En el polinomio del segundo factor, los signos van alternados, ya que el primer factor es la suma de $3 + y$.

c. $x^7 + 1$

Como $x^7 + 1$ es la suma de dos potencias con exponente 7, y como 7 es impar, entonces $x^7 + 1$ es divisible por $x + 1$.

Luego, $x + 1$ es un factor de $x^7 + 1$, y se tiene:

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 \cdot 1 + x^4 \cdot 1^2 - x^3 \cdot 1^3 + x^2 \cdot 1^4 - x \cdot 1^5 + 1^6)$$

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

d. $64a^{12} - 729b^{18}$

Como $64a^{12} - 729b^{18}$ es divisible entre $2a^2 - 3b^3$ y $2a^2 + 3b^3$, puesto que los exponentes son pares, entonces, se tiene:

$$64a^{12} - 729b^{18} =$$

$$(2a^2 - 3b^3)(32a^{10} + 48a^8b^3 + 72a^6b^6 + 108a^4b^9 + 162a^2b^{12} + 243b^{15})$$

$$64a^{12} - 729b^{18} =$$

$$(2a^2 + 3b^3)(32a^{10} - 48a^8b^3 + 72a^6b^6 - 108a^4b^9 + 162a^2b^{12} - 243b^{15})$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono

Responde.

150. ¿Para qué valores n, $a + b$ es un factor de $a^n + b^n$?

151. ¿Cómo se determinan los posibles factores de $a^n - b^n$?

152. ¿Cuáles son los pasos para factorizar $x^n - a^n$, si n es par?

153. Completa la siguiente tabla.

Término	Raíz	Resultado
$729y^{12}$	Sexta	
	Séptima	$2x^2y$
$32x^{5n}$	Quinta	
$x^{12}y^{24}$		x^2y^4
$256m^8$		$4m^2$
$a^{10}b^{30}$	Quinta	

Determina las expresiones, que se pueden factorizar por sumas o diferencias de potencias iguales. Justifica tu respuesta. Luego factorízalas.

154. $x^{10} + 1$

155. $\frac{1}{64}x^4 - y^6$

156. $m^4 - 16n^{12}$

157. $\frac{81}{256}x^5 + 16y^8$

158. $b^{15}y^{10} - x^4$

159. $x^3y^3 + w^6$

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

160. Uno de los factores del binomio $a^7 - 128$ tiene todos los términos positivos. ( )

161. Uno de los factores del binomio $x^{11} - y^{22}$ tiene diez términos. ( )

162. Toda expresión de la forma $a^n + b^n$ se puede factorizar. ( )

163. El binomio $64x^{12} - y^6$ tiene como factor $2x^2 - y$. ( )

Factoriza cada binomio.

164. $16x^4 - 625$

165. $1 - u^9$

166. $x^7 - y^7$

167. $x^{11} + 2.048$

168. $y^{14n} + 2.187$

169. $a^5 + 32y^5$

170. $x^9 - 1$

171. $x^{15} + y^{25}$

172. $m^{16} - n^{12}$

173. $81x^4 - 10.000$

Factoriza, si es posible, cada binomio.

174. $x^4 - \frac{1}{81}y^8$

175. $16.807a^{10}b^{15} - \frac{1}{32}c^{20}$

176. $2.187c^{14} + \frac{78.125}{128}m^{21}$

177. $w^{6n+12} - x^6y^{18}$

178. $\frac{x^7}{a^{7/3}} + \frac{y^{7/2}}{b^{21}}$

179. $10.000x^8 + y^{4n+8m}$

180. $\frac{m^{4n}}{16} - \frac{p^{8n}}{81}$

181. $z^5 - \frac{1}{243}$

182. $\frac{p^4}{14.641} - 1$

183. $\frac{1}{125}m^6 + \frac{8}{27}x^3y^3$

Encuentra un binomio en cada caso, según sus características. Luego, factorízalo.

184. Tiene como factor $2x - 1$ y es de cuarto grado.

185. Tiene como factor $a + 3b$ y el otro factor es un polinomio formado por seis términos.

186. Tiene como factor $\frac{2}{5}x - 7$ y el otro factor es un polinomio de cuarto grado.

187. Relaciona los términos, para formar binomios que se factoricen por suma o diferencia de potencias iguales. Explica tu respuesta.

8	$16x^{4n}$	$16a^5$
$1.296x^{12}$	81	$64c^4$
$125y^{9n}$	$729y^6$	1.024

5. Factorización de trinomios

Recurso imprimible

Cuando los polinomios tienen tres términos, se factorizan según sus características. Por tal razón hay tres clases de trinomios: los trinomios cuadrados perfectos, los trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ y los trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

5.1 Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio ordenado respecto a una de sus variables es cuadrado perfecto cuando:

- El primer y el tercer términos son cuadrados perfectos, es decir, tienen raíz cuadrada exacta.
- El segundo término es el doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer términos.
- El primer y tercer términos siempre son positivos, el segundo término puede ser positivo o negativo.

Factorizar un trinomio cuadrado es el proceso inverso a encontrar el desarrollo del cuadrado de la suma o diferencia de dos términos.

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ $\qquad$ $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

Por tanto, el trinomio cuadrado perfecto, cuando está ordenado se factoriza así:

- Si el segundo término es positivo, se eleva al cuadrado la suma de las raíces cuadradas del primer y tercer términos.
- Si el segundo término es negativo, se eleva al cuadrado la diferencia de las raíces cuadradas del primer y tercer términos.

La factorización de un trinomio cuadrado perfecto es:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 \qquad x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Por ejemplo, para factorizar el trinomio $9a^2 + 16b^2 + 24ab$.

Primero, se ordena el polinomio así: $9a^2 + 24ab + 16b^2$. Luego, se verifica que sea trinomio cuadrado perfecto, así:

$\sqrt{9a^2} = 3a$ y $\sqrt{16b^2} = 4b$, se halla la raíz cuadrada del primer y tercer términos.

Ahora, el segundo término, que es $24ab$, es igual al doble del producto de las raíces $3a$ y $4b$. Es decir, $24ab = 2 \cdot (3a) \cdot (4b)$.

Como el segundo término es positivo, entonces, la factorización del trinomio es:
$9a^2 + 24ab + 16b^2 = (3a + 4b)^2$.

EJEMPLO

Factorizar el trinomio $\frac{1}{81}x^2 + \frac{8}{9}x + 16$.

El trinomio ya se encuentra ordenado. Luego, se hallan las raíces cuadradas de dos de sus términos así:

$\sqrt{\frac{1}{81}x^2} = \frac{1}{9}x$ $\qquad$ $\sqrt{16} = 4$

Se comprueba que el otro término es el doble producto de las raíces $2 \cdot \frac{1}{9}x \cdot 4 = \frac{8}{9}x$.

Así, la factorización es $\frac{1}{81}x^2 + \frac{8}{9}x + 16 = \left(\frac{1}{9}x + 4\right)^2$.

5.2 Factorización de un trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

Ampliación multimedia

Recuerda que...

$x^4 + 6x^2 + 25$

$\sqrt{x^4} = x^2 \quad \sqrt{25} = 5$

$2(5)(x^2) = 10x^2$

El término que debe ir en la mitad es $10x^2$.

En algunos trinomios para los cuales su primer y tercer términos son cuadrados perfectos y su segundo término no es el doble producto de las raíces cuadradas de estos, es posible sumar y restar un término de tal manera que el trinomio dado se convierta en un trinomio cuadrado perfecto. A este proceso se le denomina **completar cuadrados**, para factorizar estos se realiza lo siguiente:

- **Primero,** se halla la raíz cuadrada del primer y tercer términos.
- **Segundo,** se multiplican por 2 las raíces cuadradas obtenidas anteriormente, para determinar cuál debe ser el segundo término de un trinomio que sea cuadrado perfecto.
- **Luego,** se busca un término semejante, de tal forma que sumado con el segundo término que tiene el trinomio dé como resultado el nuevo término para que sea trinomio cuadrado perfecto. Se suma y se resta este término semejante al trinomio dado.
- **Después,** se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.
- **Por último,** se factoriza la diferencia de los cuadrados resultantes.

Matemáticamente

¿Por qué al sumar y restar un mismo término en una expresión algebraica se garantiza que dicha expresión no se altera?

EJEMPLOS

1. Encontrar el término que se debe sumar y restar a cada trinomio, para que se convierta en trinomio cuadrado perfecto.

a. $4a^4 + 3a^2b^2 + 9b^4$

$\sqrt{4a^4} = 2a^2 \quad \sqrt{9b^4} = 3b^2$ Se halla la raíz cuadrada del primer y tercer términos.

$2 \cdot (2a^2)(3b^2) = 12a^2b^2$ Se halla el doble producto de las raíces.

$12a^2b^2 - 3a^2b^2 = 9a^2b^2$ Se halla el término que se va a sumar y restar.

Por tanto, el término a sumar y restar es $9a^2b^2$.

b. $x^4 - 6x^2y^2 + 25y^4$

$\sqrt{x^4} = x^2 \quad \sqrt{25y^4} = 5y^2$ Se halla la raíz cuadrada del primer y tercer términos.

$2 \cdot (x^2) \cdot (5y^2) = 10x^2y^2$ Se halla el doble producto de las raíces.

$10x^2y^2 - (-6x^2y^2) = 16x^2y^2$ Se halla el término que se va a sumar y restar.

Por tanto, el término que se va a sumar y restar es $16x^2y^2$.

2. Un hacendado tiene una parcela cuya área se expresa mediante $4n^4 + 8n^2z^2 + 9z^4$. Uno de los requisitos para acceder a una licitación, es que dicha parcela sea de forma cuadrada. ¿Puede el hacendado acceder a la licitación?



Para saber si el hacendado puede acceder a la licitación se debe determinar si el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto. Para ello, se hallan las raíces cuadradas de dos de sus términos así: $\sqrt{4n^4} = 2n^2$ y $\sqrt{9z^4} = 3z^2$

Luego, se verifica si el término restante es el doble producto de las raíces: $2(2n^2)(3z^2) = 12n^2z^2$.

Como $12n^2z^2 \neq 8n^2z^2$ el trinomio no es cuadrado perfecto, entonces, el hacendado no puede acceder a la licitación.

3. Factorizar los siguientes trinomios.

a. $a^4 + \frac{4}{3}a^2b + \frac{4}{9}b^2$

$\sqrt{a^4} = a^2$ y $\sqrt{\frac{4}{9}b^2} = \frac{2}{3}b$ Se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer términos.

$2(a^2) \cdot \left(\frac{2}{3}b\right) = \frac{4}{3}a^2b$ Se halla el doble producto de las raíces.

$\left(a^2 + \frac{2}{3}b\right)^2$ Se factoriza por trinomio cuadrado perfecto.

Por tanto, $a^4 + \frac{4}{3}a^2b + \frac{4}{9}b^2 = \left(a^2 + \frac{2}{3}b\right)^2$.

b. $x^4 + 3x^2 + 4$

$\sqrt{x^4} = x^2$ y $\sqrt{4} = 2$ Se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer términos.

$2 \cdot (x^2)(2) = 4x^2$ Se halla el doble producto de las raíces.

$4x^2 - (3x^2) = x^2$ Se calcula el término que se va a sumar y restar.

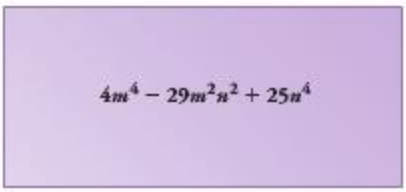
$x^4 + 4x^2 + 4 - x^2$ Se suma y se resta x^2.

$(x^2 + 2)^2 - x^2$ Se factoriza por trinomio cuadrado perfecto.

$[(x^2 + 2) + x][(x^2 + 2) - x]$ Se factoriza por diferencia de cuadrados.

$(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$ Se eliminan signos de agrupación y se ordena.

4. El área de un rectángulo está dado por la expresión $4m^4 - 29m^2n^2 + 25n^4$. Determinar las expresiones asociadas a sus dimensiones, como se muestra en la figura.



Para encontrar las dimensiones del rectángulo, largo y ancho, se debe expresar el área de la figura como producto de dos factores.

Como $4m^4 - 29m^2n^2 + 25n^4$ no es un trinomio cuadrado perfecto, entonces, se factoriza por adición y sustracción.

$\sqrt{4m^4} = 2m^2$ y $\sqrt{25n^4} = 5n^2$ Se extraen las raíces cuadradas del primer y tercer términos.

$2 \cdot (2m^2) \cdot (5n^2) = 20m^2n^2$ Se halla el doble producto de las raíces.

$20m^2n^2 - (-29m^2n^2) = 49m^2n^2$ Se calcula el término que se va a sumar y restar.

$4m^4 + 20m^2n^2 + 25n^4 - 49m^2n^2$ Se suma y se resta $49m^2n^2$.

$(2m^2 + 5n^2)^2 - 49m^2n^2$ Se factoriza por trinomio cuadrado perfecto.

$[(2m^2 + 5n^2) + 7mn][(2m^2 + 5n^2) - 7mn]$ Se factoriza por diferencia de cuadrados.

$(2m^2 + 7mn + 5n^2)(2m^2 - 7mn + 5n^2)$ Se eliminan paréntesis y se ordena.

Por tanto, las expresiones asociadas a las dimensiones del rectángulo son:

largo $2m^2 + 7mn + 5n^2$ y ancho $2m^2 - 7mn + 5n^2$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Responde. Explica con un ejemplo.

188. ¿Cómo se distinguen los trinomios cuadrados perfectos?

189. ¿Cuáles son los pasos para factorizar un trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción?

190. ¿Cuáles son las condiciones de la variable o las variables de un trinomio, para que sea posible factorizarlo por trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción?

Marca con un , si la expresión corresponde a un trinomio cuadrado perfecto, o con una , si no corresponde.

191. $y^2 + 14y + 49$ ☐

192. $81x^2 - 32xy + 4y^2$ ☐

193. $169 + x^2 - 26x$ ☐

194. $c^2 - 30c + 225$ ☐

195. $\frac{49}{16}x^2 - 28ax + 64a^2$ ☐

Encuentra el término que se debe sumar o restar al trinomio dado para que sea trinomio cuadrado perfecto.

196. $a^4 + 4a^2 + 16$

197. $x^4 - 3x^2y^2 + y^4$

198. $x^8 + 9x^4 + 25$

199. $m^6 + 8m^3n + 36n^2$

200. $25p^4 + 11p^2q^2 + 4q^4$

201. $z^2 + 15wz + 64w^2$

Factoriza cada trinomio.

202. $64x^2 + 48xy + 9y^2$

203. $a^6 - 6a^3 + 9$

204. $16x^6y^2 + z^2 - 8x^3yz$

205. $\frac{9}{25}n^4 + \frac{1}{4} - \frac{3}{5}n^2$

206. $\frac{49}{4} - 42x^n + 36x^{2n}$

207. $169x^4 - 13x^2y^2 + \frac{y^6}{4}$

208. $\frac{1}{25}a^8 + \frac{25}{36}b^6 - \frac{1}{3}a^4b^3$

209. $\frac{m^2}{9} - \frac{mn}{3} + \frac{n^2}{4}$

Realiza la factorización de cada uno de los siguientes trinomios.

210. $144 + 9a^{12} + 23a^6$

211. $y^4 + 100 - 45y^2$

212. $64x^8 + 76x^4 + 49$

213. $121a^4 - 133a^2b^4 + 36b^8$

214. $81x^4y^8 - 292x^2y^4z^8 + 256z^{16}$

Determina el término que hace falta en cada trinomio, de modo que sea trinomio cuadrado perfecto. Luego, factorízalo.

215. $9n^6 - 18n^3 +$ ☐

216. $10x^{5n} + 25 +$ ☐

217. $3x^ny^n + 9x^{2n} +$ ☐

Relaciona los trinomios a los que se les debe sumar o restar el mismo término. Justifica tu respuesta.

218. $25x^4 - 11x^2 + 1$

219. $16x^4 - 44x^2 + 25$

220. $x^4 - 45x^2 + 100$

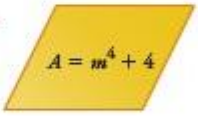
a. $9x^4 - 34x^2 + 25$

b. $x^4 - 43x^2 + 81$

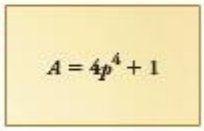
c. $9x^4 - 13x^2 + 4$

Determina la base y la altura de cada cuadrilátero.

221.



222.



Lee, observa y resuelve.

Un carpintero divide una bodega cuadrangular en cuatro departamentos, la cual conserva dos regiones cuadradas y dos regiones de igual área.



Si el área de la bodega está dada por la expresión $x^2 + 10x + 25$, responde:

223. ¿De qué manera el carpintero divide la bodega?

5.3 Factorización de trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$

Recurso imprimible

Expresiones como $x^2 + 5x + 6$, $a^4 - 8a^2 - 20$, $m^8 + 7m^4 - 44$ son trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$.

Las características de los términos del trinomio ordenado de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ son:

- El primer término tiene coeficiente 1 y es un cuadrado perfecto.
- El segundo término contiene la misma variable que el primer término, elevado a la mitad del exponente que tiene el primer término.
- El tercer término es un término independiente.

Para factorizar trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$, se realiza el siguiente procedimiento.

- **Primero,** se halla la raíz cuadrada del primer término y se escribe en dos paréntesis.
- **Luego,** se buscan dos números tales que su producto sea el término independiente c y su suma el coeficiente b del segundo término.
- **Finalmente,** se expresa el producto en dos factores de tal forma que en cada uno se ubique la suma de la raíz cuadrada del primer término con los números r y s. Así:

  $x^{2n} + bx^n + c = (x^n + r)(x^n + s)$, donde $r + s = b$ y $r \cdot s = c$.

Matemáticamente

Explica por qué trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n y^n + cy^{2n}$ se pueden factorizar como $x^{2n} + bx^n + c$.

EJEMPLOS

Factorizar los siguientes trinomios.

a. $x^2 + 9x + 14$

Primero, se halla la raíz cuadrada del primer término $\sqrt{x^2} = x$.

Segundo, se escribe la raíz, en dos paréntesis, así:

$x^2 + 9x + 14 = (x \quad)(x \quad)$

Luego, se buscan dos números cuya suma sea 9 y su producto 14.

Los números son: 7 y 2, porque:

$7 + 2 = 9$ y $7 \cdot 2 = 14$

Por último, se ubican los números y las variables en cada factor, así:

$x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$

Por tanto, $x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$.

b. $y^6 - 2y^3 - 48$

Primero, se halla la raíz cuadrada del primer término, así:

$\sqrt{y^6} = y^3$.

Luego, se buscan dos números cuya suma sea -2 y cuyo producto sea -48.

Los números son -8 y 6.

Como $-8 + 6 = -2$ y $(-8) \cdot 6 = -48$, entonces, se factoriza $y^6 - 2y^3 - 48$, así:

$y^6 - 2y^3 - 48 = (y^3 - 8)(y^3 + 6)$

Por tanto, la factorización de $y^6 - 2y^3 - 48$ es $y^6 - 2y^3 - 48 = (y^3 - 8)(y^3 + 6)$

c. $m^2 - 2m - 168$

Primero, se halla la raíz cuadrada del primer término, así: $\sqrt{m^2} = m$.

Luego, se buscan dos números cuya diferencia sea -2 y su producto -168. Para ello, se descompone 168 en factores primos:

168 |	2	$2 \times 2 \times 2 = 8$ y $3 \times 7 = 21$ no sirve.
84 |	2	$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ y 7 no sirve.
42 |	2	$2 \times 2 \times 3 = 12$ y $2 \times 7 = 14$ sí sirve.
21 |	3	$12 - 14 = -2$
7 |	7	

Entonces, los números son 12 y -14. Así, la factorización es $m^2 - 2m - 168 = (m + 12)(m - 14)$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Razono · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Responde. Explica tu respuesta.

224. ¿En cuál pareja de números se cumple que su producto es -117 y su suma 4?

225. ¿Cuál es el valor de m si:
$(x - 9)(x + 5) = x^2 + sx + m$?

226. ¿Cuál es el valor de s si:
$(x + 6)(x - 7) = x^2 + sx + m$?

227. ¿Cuál es el valor del producto de s por m, si $(x + 18)(x - 21) = x^2 + sx + m$?

228. Encuentra dos números que verifiquen la suma y el producto indicado en cada caso. Luego, completa la tabla.

Suma	Producto	Números	
-5	6	-3	-2
6	8		
-3	-10		
3	-18		
5	-24		
-6	-40		
-11	28		
1	-380		

Factoriza, si es posible, cada trinomio. Escribe al frente la factorización.

229. $x^2 + x - 2$ _____

230. $a^2 + 7a + 10$ _____

231. $y^2 - 4y + 3$ _____

232. $x^2 - 21x + 20$ _____

233. $a^2 - 43a + 432$ _____

234. $b^4 - 7b^2 - 260$ _____

235. $n^6 + 210 - 37n^3$ _____

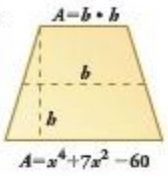
236. $x^{2n} + 15x^n + 54$ _____

237. $y^{10} + 10y^5 - 600$ _____

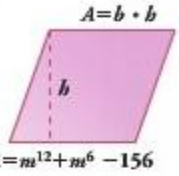
238. $x^{4n} - 1.008 - 8x^{2n}$ _____

Encuentra las dimensiones de la base y la altura de cada cuadrilátero.

239.



240.



Lee y responde.

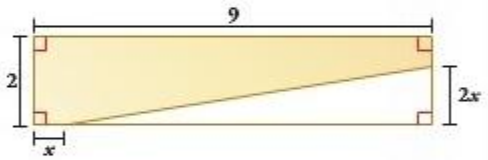
241. Si el área de un rectángulo es $x^6 - 24x^3 + 143$, ¿cuál es su perímetro?

242. Si el área de un cuadrado es $x^2 + 2xy + y^2$, ¿cuál es su perímetro?

243. ¿Qué polinomio factorizado da como resultado $(x - 12)(x + 8)$?

Lee y resuelve.

244. Expresa en forma factorizada el área sombreada.



245. El área de un terreno de forma rectangular está representado por el polinomio $a^6 + 6a^3 - 16$. ¿Cuántos metros de diferencia hay entre el largo y el ancho del terreno?



En un partido de fútbol, Andrés logró la mayor cantidad de goles e Iván metió x goles.

El producto del número de goles que metió Andrés por el número de goles que hizo Roberto es $x^2 + 3x + 2$.

246. ¿Cuántos goles más que Iván consiguió Andrés?

247. ¿Cuántos goles menos que Roberto obtuvo Iván?

5.4 Factorización de trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$

Expresiones como $8x^2 + 5x - 22$, $3y^4 - 4y^2 + 1$, $2n^8 - 11n^4 + 5$ son trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

Las características de los términos del trinomio ordenado de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ son:

- El primer término tiene coeficiente diferente a 1.
- El segundo término contiene la raíz cuadrada de la variable del primer término.
- El tercer término es un término independiente.

En la factorización de trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$, se aplican diversas maneras para factorizarlo. Los siguientes son los pasos para factorizar el trinomio por uno de los métodos.

- **Primero,** se toma como referencia el producto entre a y c.
- **Segundo,** se descompone el producto $a \cdot c$ en dos factores r y s de tal forma que: $rx^n + sx^n = bx^n$.
- **Tercero,** se escribe el trinomio $ax^{2n} + bx^n + c$ como el polinomio equivalente a: $ax^{2n} + rx^n + sx^n + c$.
- **Por último,** se factoriza el polinomio resultante como factor común por agrupación de términos.

EJEMPLOS

1. Factorizar el trinomio $15x^4 - 23x^2 + 4$.

Primero, se multiplica $15 \cdot 4 = 60$

Luego, se descompone 60 en dos factores, r y s, tales que $rx^2 + sx^2 = -23x^2$.

En este caso $r = -20$ y $s = -3$,
ya que $-20x^2 - 3x^2 = -23x^2$ y $(-20) \cdot (-3) = 60$
ahora, se escribe $15x^4 - 23x^2 + 4$ como:

$15x^4 - 20x^2 - 3x^2 + 4$.

Después se factoriza $15x^4 - 20x^2 - 3x^2 + 4$ por factor común por agrupación de términos, así:

$$\begin{aligned} 15x^4 - 20x^2 - 3x^2 + 4 &= (15x^4 - 20x^2) - (3x^2 - 4) \\ &= 5x^2(3x^2 - 4) - (3x^2 - 4) \\ &= (3x^2 - 4)(5x^2 - 1) \end{aligned}$$

Por tanto, la factorización es:

$15x^4 - 23x^2 + 4 = (3x^2 - 4)(5x^2 - 1)$

Se comprueba la factorización así:

$$\begin{aligned} (3x^2 - 4)(5x^2 - 1) &= 15x^4 - 3x^2 - 20x^2 + 4 \\ &= 15x^4 - 23x^2 + 4 \end{aligned}$$

2. Determinar las dimensiones de una finca rectangular cuya área es $20x^2 + 56x + 15$.

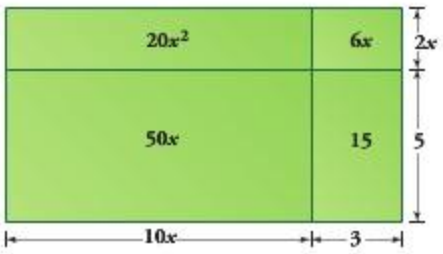
Para determinar las dimensiones de la finca, se debe factorizar la expresión $20x^2 + 56x + 15$.

Se multiplica $20 \cdot 15 = 300$ y se encuentran los factores, $50x$ y $6x$ ya que $50x + 6x = 56x$.

Después, se factoriza el polinomio resultante.

$$\begin{aligned} 20x^2 + 56x + 15 &= 20x^2 + 50x + 6x + 15 \\ &= 10x(2x + 5) + 3(2x + 5) \\ &= (2x + 5)(10x + 3) \end{aligned}$$

Por tanto, las dimensiones de la finca son $2x + 5$ y $10x + 3$, como se muestra en la figura.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Modelo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Enumera los pasos para factorizar un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

248. Se descompone el producto $a \cdot c$ en dos factores r y s, tales que $r + s = b$.

249. Se ordena el trinomio respecto a la variable x.

250. Se aplica factor común por agrupación de términos.

251. Se escribe un polinomio equivalente al trinomio dado, a partir de los factores r y s.

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

252. Todo trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$, no tiene factores cuando $c = 1$. ( )

253. Si en el trinomio $ax^{2n} + bx^n + c$, se tiene que a es un cuadrado perfecto, entonces el trinomio se factoriza como trinomio cuadrado perfecto. ( )

254. Completa la siguiente tabla.

a	b	c	m	n	$b = m + n$	$m \cdot n = a \cdot c$
7	16	4	14	2	$16 = 14 + 2$	$14 \cdot 2 = 7 \cdot 4$
6	5	-25				
15	-56	20				
9	-18	-7				
27	9	-18				
21	-29	-72				

Factoriza los siguientes trinomios.

255. $15x^2 + x - 6$

256. $4a^2 + 15a + 9$

257. $15y^2 + 16y - 15$

258. $20x^2 - 9x - 20$

259. $12a^2 - 13a - 35$

260. $7x^2 - 44x - 35$

261. $14p^2 + 13p - 12$

262. $36m^2 - 45m - 4$

263. $4n^2 + n - 33$

Escribe al frente de cada polinomio su factorización.

264. $6x^4 + 7x^2 + 2 =$ _____

265. $10m^8 + 3 + 11m^4 =$ _____

266. $4x^2 + 7xy - 15y^2 =$ _____

267. $11ab - 6b^2 - 4a^2 =$ _____

268. $16xy - 4y^2 - 15x^2 =$ _____

269. $5x^6 - 12 + 4x^3 =$ _____

Encuentra el término que falta en cada trinomio para que se pueda factorizar. Luego, factoriza el polinomio.

270. $2x^2 + \square + 3$

271. $3y^2 - 8y + \square$

272. $7a^2 + \square + 3$

273. $5x^2 - 10x - \square$

274. $30y^2 + \square - 10$

Observa, lee y responde.

275. ¿Qué factorización se puede obtener de la siguiente figura?



276. Si cada polinomio representa el área de superficies rectangulares, une las áreas que tienen una dimensión de igual longitud.

$6x^2 + 29x + 35$	$27x^2 + 27x - 84$
$49x^2 + 53x - 105$	$18x^2 - 33x - 21$
$42x^2 + 56x - 105$	$35x^2 + 178x + 48$
$15x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{15}{2}$	$9x^2 + 42x + 49$
$63x^2 - 66x - 24$	$45x^2 - 15x - 60$

6. Factorización de un cubo perfecto

Actividad

Un cubo perfecto es el resultado de los productos notables:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Un polinomio ordenado con respecto a una de sus variables es un cubo perfecto si presenta las siguientes características:

- Tiene cuatro términos.
- Su primer y cuarto términos son cubos perfectos, es decir, tienen raíz cúbica exacta.
- Su segundo término es el triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto término.
- Su tercer término es el triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del cuarto término.
- Los signos del primer y tercer términos son siempre positivos, el segundo y cuarto términos tienen signos iguales y pueden ser negativos o positivos.

Para factorizar los cubos perfectos, primero se debe comprobar que sean cubos perfectos. Luego, se factoriza como se indica a continuación:

- Se hallan las raíces cúbicas del primer y cuarto términos, y se factoriza como el cubo de la suma de esas raíces cúbicas, si todos los términos son positivos.

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$$

- Se hallan las raíces cúbicas del primer y cuarto términos, y se factoriza como el cubo de la diferencia de esas raíces cúbicas, si hay términos negativos.

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$$

EJEMPLOS

1. Indicar si el siguiente polinomio corresponde a un cubo perfecto:

$$64m^3 + 48m^2n + 12mn^2 + n^3.$$

Luego, factorizar.

$64m^3 + 48m^2n + 12mn^2 + n^3$	Se ordena el polinomio.
$\sqrt[3]{64m^3} = 4m$ y $\sqrt[3]{n^3} = n$	Se extrae la raíz cúbica del primer y cuarto términos.
$3(4m)^2 \cdot (n) = 48m^2n$	Se verifica que el triple del cuadrado de $4m$ por n sea igual al segundo término.
$3(4m)(n)^2 = 12mn^2$	Se verifica que el triple de $4m$ por el cuadrado de n sea igual al tercer término.

Como todos los términos son positivos, se tiene que:

El polinomio $64m^3 + 48m^2n + 12mn^2 + n^3$ corresponde a un cubo perfecto de la suma.

Por tanto, la factorización de $64m^3 + 48m^2n + 12mn^2 + n^3$ es:

$$64m^3 + 48m^2n + 12mn^2 + n^3 = (4m + n)^3$$

Matemáticamente

¿Cómo representarías en forma geométrica un cubo perfecto?

2. Hallar la arista de un cubo, si su volumen está dado por el polinomio

$125x^3 - 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3$.

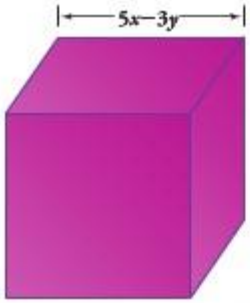
Para hallar el polinomio que expresa la arista del cubo, se comprueba que la expresión $125x^3 - 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3$ es un cubo perfecto. Luego, se factoriza así:

$125x^3 - 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3$	Se escribe la expresión.
$\sqrt[3]{125x^3} = 5x$ y $\sqrt[3]{27y^3} = 3y$	Se extrae la raíz cúbica del primer y cuarto términos.
$3(5x)^2(3y) = 225x^2y$	Se verifica que el triple del cuadrado de $5x$ por $3y$ sea igual al segundo término.
$3(5x)(3y)^2 = 135xy^2$	Se verifica que el triple de $5x$ por el cuadrado de $3y$ sea igual al tercer término.

Ahora, se verifican los signos, es decir, el primer y tercer términos son positivos y el segundo y cuarto términos tienen signos iguales, en este caso, negativos.

Entonces, la factorización es: $125x^3 - 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3 = (5x - 3y)^3$.

Por tanto, la arista del cubo es $5x - 3y$.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

277. ¿Cuáles son las características de un cubo perfecto?

278. ¿Cómo distinguir la factorización del cubo de una suma con el cubo de una diferencia?

Completa el término que falta en cada caso. Luego, realiza la factorización.

279. $m^3 + \square + 27m + 27$

280. $8y^3 - 84y^2z + \square - \square$

281. $216 - \square + \square - a^3$

Factoriza los siguientes polinomios.

282. $n^6 + 3m^4n^3 + 3m^2n^6 + n^9$

283. $x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6$

284. $8n^3 - 48n^2m + 96nm^2 - 64m^3$

285. $a^6 + 6a^4 + 12a^2 + 8$

286. $64n^9 - 125m^{12} - 240n^6m^4 + 300n^3m^8$

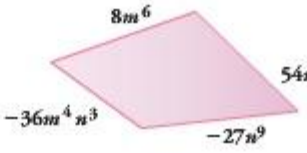
287. $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$

288. $x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{16}x - \frac{1}{64}$

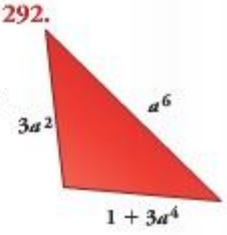
289. $x^3 + x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{27}$

Escribe el perímetro de cada figura como un polinomio. Luego, factoriza la expresión que resulta.

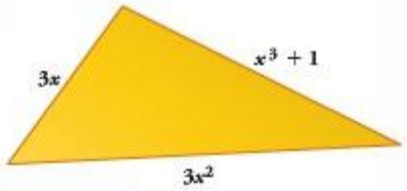
290.



292.



291.



293. Determina el área de la cara lateral del cubo que se muestra en la figura.



$V = 343 + 147x + 21x^2 + x^3$

7. Factorización completa

Recursos imprimibles

Factorizar por completo una expresión algebraica significa descomponerla totalmente como el producto de factores primos. Para ello, algunas veces se requiere aplicar más de un caso de factorización.

7.1 Factorización completa con los casos de factorización

Para realizar la **factorización completa de un polinomio** es necesario analizar sus características con el fin de factorizarlo en forma correcta. A continuación se muestran algunos puntos importantes que se deben tener en cuenta:

- Si el polinomio tiene factor común, se factoriza por este caso de factorización.
- Si el polinomio es un binomio, se verifica si es diferencia de cuadrados, suma o diferencia de cubos o suma o diferencia de potencias iguales. Luego, se realiza la correspondiente factorización, según el caso.
- Si el polinomio es un trinomio, se determina si es trinomio cuadrado perfecto, trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ o de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ y se realiza la factorización respectiva.
- Si el polinomio tiene cuatro términos, se verifica si se puede factorizar por agrupación de términos o si es un cubo perfecto.
- Si el polinomio tiene más de cuatro términos, se comprueba si se puede realizar factorización por agrupación de términos.
- Se revisa si el polinomio está totalmente factorizado.

Historia de las matemáticas

Babilonios



La factorización es una de las herramientas más utilizadas para transformar expresiones algebraicas en forma adecuada.

Los babilonios fueron los primeros en resolver ecuaciones de segundo grado, aplicando el método de completar el cuadrado.

EJEMPLOS

1. Factorizar completamente cada expresión.

a. $x^3 - 4x$

$x^3 - 4x$ Tiene factor común.

$= x(x^2 - 4)$ Se factoriza como factor común.

$= x(x + 2)(x - 2)$ Se factoriza por diferencia de cuadrados.

Por tanto, $x^3 - 4x = x(x + 2)(x - 2)$

b. $ax^2 - bx^2 - cx^2 + 2ax - 2bx - 2cx - 3a + 3b + 3c$

$ax^2 - bx^2 - cx^2 + 2ax - 2bx - 2cx - 3a + 3b + 3c$ Se debe agrupar para factorizar.

$= (ax^2 - bx^2 - cx^2) + (2ax - 2bx - 2cx) - (3a - 3b - 3c)$ Se agrupan términos.

$= x^2(a - b - c) + 2x(a - b - c) - 3(a - b - c)$ Se factoriza como factor común.

$= (a - b - c)(x^2 + 2x - 3)$ Se factoriza por agrupación de términos.

$= (a - b - c)(x + 3)(x - 1)$ Se factoriza como trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$.

Por tanto,

$ax^2 - bx^2 - cx^2 + 2ax - 2bx - 2cx - 3a + 3b + 3c = (a - b - c)(x + 3)(x - 1)$.

Matemáticamente

Si un polinomio es de grado n, ¿cuántos factores posibles puede tener su factorización?

2. Realizar la factorización completa de cada polinomio.

a. $2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x$

$2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x$ Tiene factor común.

$= 2x(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$ Se factoriza como factor común.

$= 2x[(x + 1)^3 + 1]$ Se factoriza por cubo perfecto.

$= 2x[(x + 1) + 1][(x + 1)^2 - (x + 1) + 1^2]$ Se factoriza como suma de cubos.

$= 2x[x + 2][x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 1]$ Se eliminan los paréntesis y se suma.

$= 2x(x + 2)(x^2 + x + 1)$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, $2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x = 2x(x + 2)(x^2 + x + 1)$.

b. $x^4 - y^4$

$x^4 - y^4$ Es un binomio.

$= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ Se factoriza como diferencia de cuadrados.

$= (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$ Se factoriza como diferencia de cuadrados.

Por tanto, $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

c. $81x^4y - 3xy^4$

$81x^4y - 3xy^4$ Tiene factor común.

$= 3xy(27x^3 - y^3)$ Se factoriza como factor común.

$= 3xy(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$ Se factoriza por diferencia de cubos.

Por tanto, $81x^4y - 3xy^4 = 3xy(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

d. $30x^{2n+1} - 46x^{n+1}y^n + 8xy^{2n}$

$30x^{2n+1} - 46x^{n+1}y^n + 8xy^{2n}$ Tiene factor común.

$= 2x(15x^{2n} - 23x^ny^n + 4y^{2n})$ Se factoriza por factor común.

$= 2x(3x^n - 4y^n)(5x^n - y^n)$ Se factoriza como trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

Por tanto, $30x^{2n+1} - 46x^{n+1}y^n + 8xy^{2n} = 2x(3x^n - 4y^n)(5x^n - y^n)$

e. $5a^5 - 40a^3 + 80a$

$5a^5 - 40a^3 + 80a$ Tiene factor común.

$= 5a(a^4 - 8a^2 + 16)$ Se factoriza como factor común.

$= 5a(a^2 - 4)^2$ Se factoriza como trinomio cuadrado perfecto.

$= 5a[(a + 2)(a - 2)]^2$ Se factoriza como diferencia de cuadrados.

$= 5a(a + 2)^2(a - 2)^2$ Se aplica propiedad de la potenciación.

Por tanto, $5a^5 - 40a^3 + 80a = 5a(a + 2)^2(a - 2)^2$

f. $8m^3 + 8$

$8m^3 + 8 = 8(m^3 + 1) = 8(m + 1)(m^2 - m + 1)$ Se factoriza por factor común y suma de cubos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde. Luego, explica tu respuesta.

294. ¿Cuáles son los casos de factorización que se aplican al realizar la factorización completa de un polinomio?

295. ¿Qué aplicarías primero, trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ o trinomio cuadrado perfecto?

296. ¿Por qué es necesario aplicar primero factor común en la factorización completa de un polinomio?

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

297. Factorizar es convertir una expresión algebraica en una multiplicación de factores primos. ( )

298. El factor de un polinomio no puede ser otro polinomio. ( )

299. Una diferencia de cuadrados es siempre un cuadrado perfecto. ( )

300. Al factorizar una suma de cubos, los factores son dos polinomios. ( )

Relaciona cada trinomio con sus respectivos factores.

301. $6x^4 - 7x^2 - 5$

302. $16x^4 - 8x^2 + 1$

303. $4x^4 + 3x^2 - 1$

a. $x + 2$

b. $2x - 1$

c. $x^2 - 7$

d. $3x^2 - 5$

e. $2x^2 - x + 1$

f. $2x^2 + 1$

g. $x^2 + 1$

h. $2x + 1$

Determina tres factores para cada polinomio.

304. $5a^2 - 20$

305. $27 - 3x^2$

306. $16x^4 + 2xy^3$

307. $6mx^2 - mx - 2m$

308. $2m - 12 + 30m^2$

309. $4x^3 - 12x^2 - x + 3$

310. $x^6 + 4x^3 - 32$

311. $p^4 - 16q^4$

Realiza la descomposición de cada polinomio en cuatro factores.

312. $25x^4 - 5x^3 - 25x^2 + 5x$

313. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

314. $y^5 - y$

315. $x^6 - 64$

316. $(a^2 - 1)^2 - 3(a^2 - 1)$

317. $x^6 - 2x^3 + 1$

318. $x^4 - 25x^2 + 144$

319. $4a^6 + 4a^4 - 4a^2b^2 + a^2 - 4b^2a^4 - b^2$

320. $2b^4 - 6b^3 + 6b^2 - 2b$

321. $c^7 + 6c^5 + 12c^3 + 8c$

322. Descubre en qué parte se cometió un error en la factorización del polinomio

$2mp^2q - 3mpq^2 - 2np^2q + 3npq^2$

$2mp^2q - 3mpq^2 - 2np^2q + 3npq^2$

$= pq(2mp - 3mq - 2np + 3nq)$

$= pq[(2mp - 3mq) + (2np - 3nq)]$

$= pq[m(2p - 3q) + n(2p - 3q)]$

$= pq(2p - 3q)(m + n)$

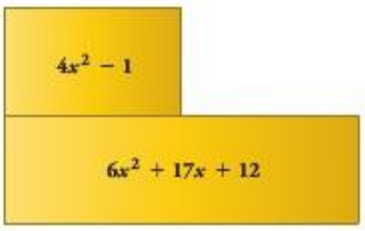
Construye polinomios que se puedan factorizar aplicando únicamente los casos que se mencionan. Luego, realiza la correspondiente verificación.

323. Factor común y diferencia de cubos.

324. Factor común por agrupación de términos y trinomio cuadrado perfecto.

325. Diferencia de cuadrados y trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$.

326. Expresa el perímetro de la figura en términos de x, a partir del área de cada parte.



7.2 Factorización de un polinomio con división sintética

Actividad Enlace web

En la división de polinomios, se aplica la división sintética para dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x - a$ y así encontrar el residuo de esta división.

En este caso se aplicará la división sintética para encontrar los factores que componen los polinomios que tienen las siguientes características.

> Si el residuo de dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x - a$ es cero, el polinomio es divisible entre $x - a$, lo cual equivale a decir que $x - a$ es un factor de $P(x)$.

Para factorizar un polinomio $P(x)$ por división sintética, se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

- **Primero,** se hallan los factores del término independiente.
- **Segundo,** se divide $P(x)$ entre los factores $x - a$ aplicando división sintética, donde a representa cada uno de los factores del término independiente.
- **Luego,** si el residuo es cero, entonces $x - a$ es un factor de $P(x)$.

EJEMPLOS

1. Factorizar el polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Los factores del término independiente -2, son -1, 1, -2 y 2. Luego, los posibles factores de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ son:

$(x + 1)$, $(x - 1)$, $(x + 2)$ y $(x - 2)$.

Se realiza la división sintética para $x + 1$:

1	−4	5	−2	−1
	−1	5	−10	
1	−5	10	−12	

El residuo es -12. Por tanto, $x + 1$ no es factor de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Se realiza la división sintética para $x - 1$:

1	−4	5	−2	1
	1	−3	2	
1	−3	2	0	

El residuo obtenido es 0.

Por tanto, $x - 1$ es un factor de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Luego, $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$.

Por último, se aplica la factorización de trinomio de la forma $x^{2n} + bx + c$, así:

$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

Por tanto, $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x - 2)(x - 1)$

Matemáticamente

Si el residuo de dividir $P(x)$ entre un binomio de la forma $cx - a$, con c entero positivo, es cero, donde a es el factor del término independiente y c es un factor del coeficiente del término de mayor grado del polinomio, $cx - a$ es factor de $P(x)$.

2. Aplicar el teorema de D'Alembert para encontrar un factor del polinomio $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 8x + 8$.

Los factores del término independiente 8 son:

$-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8$ y 8.

Ahora, se halla $P(-1)$, $P(1)$, $P(-2)$, $P(2)$, $P(-4)$, $P(4)$, $P(-8)$ y $P(8)$,

$P(-1) = 2(-1)^4 - (-1)^3 - 4(-1)^2 - 8(-1) + 8 = 15$

$P(1) = 2(1)^4 - (1)^3 - 4(1)^2 - 8(1) + 8 = -3$

$P(-2) = 2(-2)^4 - (-2)^3 - 4(-2)^2 - 8(-2) + 8 = 48$

$P(2) = 2(2)^4 - (2)^3 - 4(2)^2 - 8(2) + 8 = 0$

$P(-4) = 2(-4)^4 - (-4)^3 - 4(-4)^2 - 8(-4) + 8 = 552$

$P(4) = 2(4)^4 - (4)^3 - 4(4)^2 - 8(4) + 8 = 360$

$P(-8) = 2(-8)^4 - (-8)^3 - 4(-8)^2 - 8(-8) + 8 = 8.520$

$P(8) = 2(8)^4 - (8)^3 - 4(8)^2 - 8(8) + 8 = 7.368$

Luego, para $a = 2$, se tiene que el polinomio $P(x)$ es divisible por $x - 2$.

Por tanto, $x - 2$ es un factor del polinomio

$2x^4 - x^3 - 4x^2 - 8x + 8$.

Historia de las matemáticas

Jean le Rond D'Alembert

Matemático, filósofo y físico francés, formuló el siguiente teorema: Si a es un número real, el polinomio $P(x)$ es divisible entre $x - a$ si y sólo si $P(a) = 0$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito

Responde. Explica tu respuesta.

327. ¿Cuál es la relación del residuo al dividir el polinomio $P(x)$ con el factor $x - a$?

328. ¿Cuál es el objetivo de aplicar la división sintética en factorizar polinomios?

329. ¿Cuál es la importancia de usar el teorema de D'Alembert en hallar los factores de un polinomio?

Verifica cuál de los binomios es factor del polinomio dado. Justifica tu respuesta.

330. $x^3 + 15x^2 + 59x + 45$

a. $x - 5$ **b.** $x - 3$ **c.** $x - 9$ **d.** $x + 1$

331. $n^3 + 17n^2 + 82n + 120$

a. $n + 5$ **b.** $n + 10$ **c.** $n + 2$ **d.** $n - 12$

332. $3x^4 - x^3 - 21x^2 + 25x - 6$

a. $x - \frac{1}{2}$ **b.** $x + \frac{1}{6}$ **c.** $x - \frac{1}{3}$ **d.** $x + \frac{1}{2}$

Escribe las expresiones que faltan para completar la factorización.

333. $x^4 - 4x^3 - \square\, x^2 + 24x + \square$

334.

1	−4	−17	24	36	−3
	□	21	□	−36	
1	□	□	12	0	

335.

1	−7	4	12	□
	□	□	□	
1	−8	12	□	

336. $x^2 - 8x + 12 = (x - \square)(x - \square)$

337. $x^4 - 4x^2 - 17x^2 + 24x + 36 =$ _____

Factoriza los siguientes polinomios.

338. $15x^4 + 94x^3 - 5x^2 - 164x + 60$

339. $x^5 - 16x^4 + 77x^3 - 50x^2 - 372x + 360$

340. $y^6 - 41y^4 + 184y^2 - 144$

341. $x^6 - 3x^5 - 25x^4 + 76x^3 - 3x^2 - 25x + 75$

342. $y^5 - 2y^4 - 15y^3 - 3y^2 + 6y + 45$

343. Encuentra los valores de a y b, para que el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$ tenga como factores $(x - 1)$ y $(x - 3)$.

EJERCICIOS PARA REPASAR

Concepto de factorización

Determina cuáles de los siguientes polinomios son primos o compuestos. Explica tu respuesta.

344. $7x^2y$ _____

345. $4a^2 + b$ _____

346. $12a^3b^5$ _____

347. $x^4 - 5y$ _____

Factorización de monomios

348. Completa el siguiente cuadro con los factores del monomio $27x^2y^3$, si en todas las filas y en todas las columnas se encuentra la factorización del monomio.

3				
		x		
		y^2		
				x
	y			

Encuentra cuatro factorizaciones distintas de cada monomio.

349. $-8x^5y$

_____

350. $720a^4b$

_____

351. $-\frac{240}{169}x^2y$

_____

352. $-\frac{4}{121}m^5n^9$

_____

Factorización por factor común

Factoriza por factor común cada polinomio.

353. $14x^2 - 21x^3 + 49x^4$

_____

354. $16a^2b + 48a^3b^2 + 80a^4b - 96ab^3$

_____

355. $3x(y - 2) + 5z(2 - y) - (y - 2)$

_____

Factoriza cada expresión por agrupación de términos.

356. $4m^2 - 6mn - 8m + 12n$

_____

357. $x^2 - 2x^2y + x^2y^2 - z^2 + 2z^2y - z^2y^2$

_____

358. $\frac{10}{7}b^2y - \frac{25}{7}b^2x + \frac{75}{7}ax - \frac{30}{7}ay$

_____

359. $\frac{6}{20}a^3 - \frac{3}{8}a^2b - \frac{2}{5}ac + \frac{1}{2}bc$

_____

Factorización de binomios

Factoriza cada uno de los siguientes binomios.

360. $x^{15}y^{12}z^6 - 343$

_____

361. $81u^4 - v^6$

_____

362. $p^{102} + 1.331q^{6n}$

_____

363. $512x^2y^4z^6 - 8x^{24}$

_____

364. $x^{3n} + 8y^{6m+3}$

_____

365. $\frac{169}{225}x^{2n+4} - 100y^{6m-2}$

_____

Factoriza cada expresión.

366. $(s + 2t)^3 - s^3$

_____

367. $(4x - 5)^4 - 256y^8$

_____

368. $361(7x + 5)^2 - 400(y - 1)^2$

_____

369. $216(a + b)^3 + 27(a - 2b)^3$

_____

370. $32(x + 1)^5 - 243y^{10}$

_____

Factorización de trinomios

Escribe el término que falta para que cada trinomio cumpla la condición dada. Luego realiza la factorización.

371. $x^2 + 10x + \square$ es un trinomio cuadrado perfecto.

_____

372. $x^6 - \square - 33$ es un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$.

_____

373. $\square - 13x^4 - 77$ es un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

_____

Factoriza cada uno de los siguientes trinomios.

374. $36x^4 - 12x^2y^2 + y^4$

_____

375. $\frac{4}{25}a^6b^4 - \frac{3}{10}a^3b^2 + \frac{9}{64}$

_____

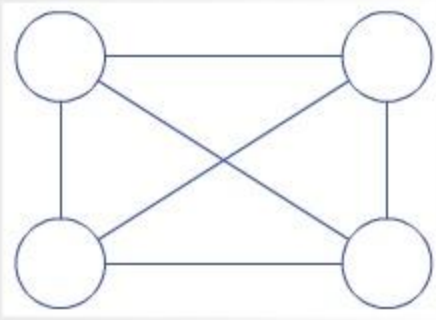
376. $x^4 - 16x^2 + 60$

_____

377. $a^6 + 3a^3y - 40y^2$

_____

378. **Ubica los factores en cada círculo, sin que sobren factores, de tal manera que la figura contenga las factorizaciones de los polinomios dados de manera vertical, horizontal y diagonal.**



- $2x^2 - 3x - 9$
- $4x^2 + 16x + 15$
- $4x^2 + 12x + 5$
- $2x^2 - x - 15$
- $2x^2 - 5x - 3$
- $4x^2 + 8x + 3$

Factorización de un cubo perfecto

Completa cada expresión para formar el cubo perfecto de un binomio.

379. $t^3 + 6t^2 + \square + \square$

_____

380. $8x^3 - \square + \square - 1$

_____

381. $\square + \square + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}$

_____

Factoriza los siguientes polinomios.

382. $64n^3 + 240n^2y + 300ny^2 + 125y^3$

_____

383. $x^6 - 6x^4y + 12x^2y^2 - 8y^3$

_____

Factorización completa

Realiza la factorización completa de cada polinomio.

384. $a^{4n} - 81$

_____

385. $\frac{1}{2}a^5 + a^3 - \frac{3}{2}a^3b - 3ab$

_____

386. $x^5 - x^3y^2 - x^2y^3 + y^5$

_____

387. $12x^5 + 2x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 4x$

_____

388. $2y^6 - 32y^2 - 2y^5 + 32y$

_____

Factoriza los polinomios con división sintética.

389. $x^6 + 6x^5 + 4x^4 - 42x^3 - 113x^2 - 108x - 36$

_____

390. $x^7 - 20x^5 - 2x^4 + 64x^3 + 40x^2 - 128$

_____

391. $y^6 - 8y^5 + 6y^4 + 103y^3 - 344y^2 + 396y - 144$

_____

PROBLEMAS PARA REPASAR

Laura tiene un jardín en la casa de campo de su familia, para sembrar hortalizas. Si el jardín tiene forma rectangular y su superficie está expresada por el trinomio $(6x^2 - 7x - 20)$ m^2.

¿Cuáles son las expresiones algebraicas para sus dimensiones y para su perímetro?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuáles son las expresiones algebraicas para sus dimensiones y para su perímetro?

¿Cuáles son los datos del problema?

Un jardín en forma rectangular.

La expresión del área del jardín es $(6x^2 - 7x - 20)$ m^2.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, para expresar algebraicamente las dimensiones del jardín, se debe factorizar la expresión asociada al área. Es decir, $6x^2 - 7x - 20$, así:

Se toma como referencia el producto de $6 \cdot (-20) = -120$

Luego, se encuentran dos factores r y s tales que $r \cdot s = -120$ y $r + s = -7$, que en este caso son: -15 y 8.

Ahora, se expresa $6x^2 - 7x - 20$, con un polinomio equivalente como sigue:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x - 20 &= 6x^2 - 15x + 8x - 20 \\ &= (6x^2 - 15x) + (8x - 20) && \text{Se agrupan los términos.} \\ &= 3x(2x - 5) + 4(2x - 5) && \text{Se factoriza por factor común.} \\ &= (2x - 5)(3x + 4) && \text{Se factoriza por factor común por agrupación de términos.} \end{aligned}$$

Luego, $6x^2 - 7x - 20 = (2x - 5)(3x + 4)$

Al analizar los factores, dando valores a x, se tiene que:

El largo está dado por $(2x - 5)$ m y el ancho por $(3x + 4)$ m para valores de x mayores que $\frac{5}{2}$.

Segundo, el perímetro del jardín se obtiene así:

$P = 2l + 2a = 2(2x - 5) + 2(3x + 4) = 10x - 2$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que los procedimientos y las operaciones son correctas.

Por tanto, se tiene que las dimensiones del rectángulo con área $(6x^2 - 7x - 20)$ m^2 son: largo $(2x - 5)$ m y ancho $(3x + 4)$ m. Además el perímetro es: $10x - 2$.

Resuelve las preguntas 392 a 394 con la siguiente información y los datos del problema resuelto.

El primo de Laura, recomendó que el área del jardín tenga $(6x^2 + 17x - 14)$ m^2.

392. Expresa las nuevas dimensiones del jardín.

393. En relación con el área original del jardín de Laura, ¿aumentó o disminuyó cada dimensión?

394. ¿Cuál es el nuevo perímetro del jardín?

Resuelve las preguntas 395 a 396 con base en la siguiente información.

Jorge desea construir una repisa para su biblioteca. Si originalmente pensó en una repisa de área

$(4x^2 - 8x - 5)$ cm^2 y luego cambió a una repisa de

$(4x^2 + 4x - 3)$ cm^2 de superficie:

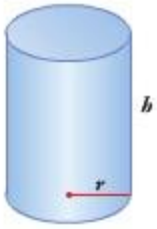
395. ¿Cuántos centímetros más tendrán el largo y el ancho de la repisa con la nueva área?

396. ¿Cuál es el perímetro de la repisa?

397. Una arquitecta diseñó ventanas rectangulares con un área de $(16x^2 - 81)$ cm^2. Una de las dimensiones de cada ventana es el tipo $(ax + b)$ cm, donde a y b son números enteros. Determina el valor de $a^2 + b^2$.

398. El perímetro de un rectángulo es $(4x^2 + 14)$ m y su área, $(x^4 + 7x^2 + 10)$ m. Halla la medida de su largo.

399. El volumen del cilindro se representa mediante la expresión $(72\pi p^3 + 48\pi p^2 + 8\pi p)$. Si el volumen del cilindro está dado por $V = \pi r^2 h$, ¿cuánto suman el radio y la altura del cilindro?



Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

...Para predecir la distancia que alcanza una pelota de golf.

La pelota de golf, al ser golpeada por el aire, genera una trayectoria especial llamada parábola.

Cada golfista se esmera en lograr un golpe perfecto. Para tal fin debe conocer la distancia a la que se encuentra el hoyo y escoger el palo indicado para lanzar la pelota lo más cerca posible del *Green*, que es la zona más próxima al hoyo.

Existen tres tipos de palos de golf que son:

Maderos, utilizados para golpes largos. Generalmente son de cabeza grande y livianos. Son usados cuando el deportista está a más de 160 m del *Green*.

Hierros, que son utilizados para golpes medios y en condiciones ambientales difíciles en distancias menores a 160 m. Son un poco más pesados y de cabeza pequeña.



Putter que es usado cuando la bola se encuentra en el *Green*. Es utilizado para golpes rectos sobre el césped.

Los fabricantes, en cada juego de golf, incluyen 17 palos en total, 7 maderos, 9 hierros y un *putter*. Cada uno de ellos se usa para una distancia específica. Para esto se debe calcular la distancia horizontal que alcanza cada uno de ellos.



La trayectoria recorrida de los maderos y los hierros se puede expresar mediante un trinomio de grado dos, respecto al alcance x en metros.

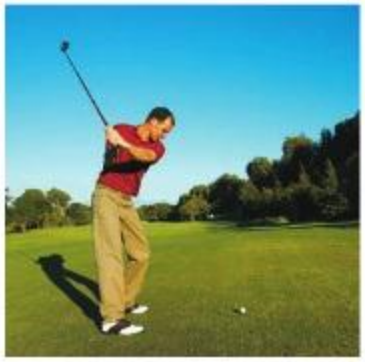
Por ejemplo, la expresión usada para el madero de mayor alcance es:

$$A(x) = -x^2 + 720x - 129.600$$

Al factorizar por medio de un trinomio cuadrado perfecto la expresión resultante es:

$$A(x) = -(x - 360)^2$$

Galería de imágenes





1. **¿Por qué crees que es importante calcular la distancia que puede alcanzar una pelota de golf cuando es golpeada con un madero o un hierro?**

2. **¿De qué depende el uso de un madero o un hierro cuando se golpea una pelota de golf? Explica tu respuesta.**

3. **Lee la información.**

   En la expresión factorizada para el madero de mayor alcance

   $$A(x) = -(x - 360)^2$$

   Se puede determinar la distancia a la que se encuentra el deportista, así:

   $x - 360 = 0$ Se iguala a cero el paréntesis.

   $x = 360$ Se halla x.

   Luego, la distancia es 360 metros.

   Factoriza las siguientes expresiones y encuentra el valor de x. Luego, indica si la distancia hace referencia a un madero o a un hierro.

   - $-x^2 + 600x - 90.000 = 0$
   - $-x^2 + 100x - 2.500 = 0$
   - $-x^2 + 220x - 12.100 = 0$
   - $-x^2 + 500x - 62.500 = 0$
   - $-x^2 + 320x - 25.600 = 0$
   - $-x^2 + 30x - 225 = 0$

4. **En los deportes como el lanzamiento de jabalina, fútbol y béisbol entre otros; es muy común encontrar movimientos parabólicos cuando se trata de un lanzamiento en el aire. Averigua cuál es el alcance horizontal máximo en uno de estos deportes y plantea una expresión algebraica que permita encontrar ese alcance.**

Trabaja con Algebrator

Objetivo: realizar la factorización de polinomios, identificando los procedimientos adecuados.

Descripción: factorizar binomios y trinomios, utilizando el programa Algebrator.

Para acceder a Algebrator, ingresa y descarga el programa en: depositfiles.com/es/files/eklrbeo1d

1. En el menú o en el escritorio haz clic en **Algebrator**.

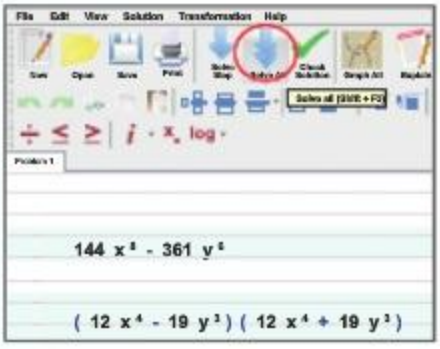
2. Haz clic en **New** para abrir una nueva hoja de cálculo llamada **Problem 1**, como se muestra en la figura.



3. Ingresa el binomio $144x^8 - 361y^6$ en la zona de trabajo.

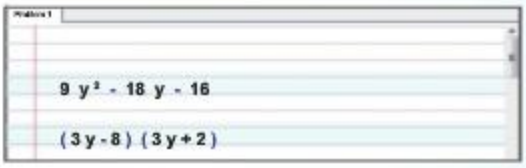


4. Selecciona **Solve all**, para factorizar el binomio $144x^8 - 361y^6$.



5. Observa en la hoja de cálculo, los pasos de la factorización del binomio $144x^8 - 361y^6$.

6. Ingresa el polinomio: $9y^2 - 18y - 16$. Luego, repite el proceso descrito en el punto 4, para realizar su factorización.



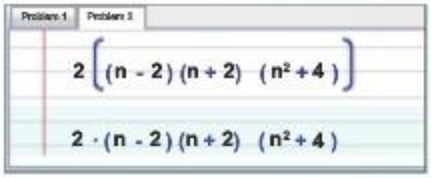
7. Haz clic sobre la opción **New** para abrir un nuevo documento llamado **Problem 2**. Ingresa el polinomio $2n^4 - 32$, para realizar su factorización completa.



8. Haz clic en **Solve Step**, para realizar paso a paso la factorización completa del polinomio $2n^4 - 32$.



9. Haz clic varias veces en **Solve Step**, hasta obtener la factorización completa.





6 Fracciones algebraicas

Estándares: Pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Hallar el mcd y el mcm entre varias expresiones algebraicas.
- Resolver **operaciones aditivas entre fracciones algebraicas**.
- Resolver **operaciones multiplicativas entre fracciones algebraicas**.
- Simplificar el resultado de operar fracciones algebraicas.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba PISA

4	Multimedia	**1**	Audio
1	Galería	**12**	Imprimibles
6	Actividades	**1**	Enlace web

Lo que sabes...

1. Determina el máximo común divisor en cada caso.

   a. 12, 18 y 24 b. 32, 40 y 48

2. Halla el mínimo común múltiplo en cada caso.

   a. 6, 5 y 15 b. 10, 25 y 60

3. Resuelve las siguientes operaciones.

   a. $(x^2 - xy + y) + (x^2 + xy + y) =$ _____

   b. $(x^2 - xy)(x^2 + y) =$ _____

   c. $(x + 8)(x - 3) =$ _____

   d. $(a + b)^2 =$ _____

4. Factoriza cada expresión.

   a. $a^2 + 2ab + b^2 =$ _____

   b. $a^2 - b^2 =$ _____

   c. $a^3 + b^3 =$ _____



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para conocer la resistencia de la sangre.

La hemodinámica es la parte de la biofísica que estudia el flujo de la sangre y los mecanismos en el sistema circulatorio y vascular, teniendo como base los principios físicos de la dinámica de fluidos. El sistema cardiovascular está compuesto principalmente por el corazón, la sangre y los vasos sanguíneos.

Lee más acerca de este tema en la página 180.

Cronología de las fracciones algebraicas

Egipto. Se utilizaron fracciones por primera vez con numerador 1 para medir terrenos con cantidades que no eran enteras.

1000 a. C.

India. Se plantearon las reglas generales para operar las fracciones utilizadas en la resolución de problemas astronómicos.

300 a. C.

Grecia. Euclides descubrió un método para calcular el mcd de dos números sin necesidad de calcular los divisores ni los factores de un número.



200 a. C.

Alejandría. Diofanto introdujo el uso de abreviaciones para designar cantidades y operaciones (álgebra sincopada).



600 d. C.

1400 d. C.

India. Nilakantha Somayaji, escribió en su libro, *Aryabhattiya bhashia*, problemas algebraicos utilizando operaciones con fracciones.

1882 d. C.

Francia. El historiador matemático Paul Tannery habló sobre las proposiciones algebraicas en forma geométrica incluyendo fracciones.

1. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Historia de las matemáticas

Escuela Bagdad

Los árabes fueron los pioneros en sistematizar el álgebra. A finales del siglo VIII, floreció la Escuela de Bagdad, a la que pertenecían Al-Juarismi, Al Batani y Omar Khayyam.



Recuerda que...

El máximo común divisor, mcd, de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

Por ejemplo, el máximo común divisor de 8, 12 y 16 es 4.

En expresiones racionales, para realizar las operaciones básicas, se necesita hallar el **máximo común divisor**, **mcd**, y el **mínimo común multiplo**, **mcm**.

El procedimiento para encontrar el mcd y el mcm de expresiones algebraicas es similar al empleado en teoría de números. Allí, su uso es operar fracciones, cuyos denominadores deben ser iguales y la forma más general es obtener un denominador común entre sí.

A continuación, se explica la forma de encontrar el mcd y el mcm de dos o más polinomios y su aplicación para resolver expresiones algebraicas racionales.

1.1 Máximo común divisor

El **máximo común divisor de dos o más polinomios** es un polinomio de mayor coeficiente numérico y de mayor grado que divide exactamente a cada uno de los polinomios.

Máximo común divisor de monomios

Recurso imprimible

El máximo común divisor de dos o más monomios se determina de la siguiente manera:

- **Primero,** se determina el máximo común divisor de los coeficientes.
- **Luego,** se indican las variables comunes entre los monomios, con su menor exponente.
- **Por último,** se escribe el máximo común divisor como el producto del mcd de los coeficientes por las variables que son comunes a todos los monomios con el menor exponente.

Por ejemplo, para hallar el mcd de los monomios $12a^4b$ y $18a^3b^2$ se tiene que:

Primero, el máximo común divisor de 12 y 18 es 6, ya que 6 es el mayor de los divisores comunes de 12 y 18, o también al realizar la descomposición:

12	18	2	Se divide entre 2.
6	9	3	Se divide entre 3 ya que los dos son divisibles entre ese número.
2	3		

$\text{mcd}\,(12, 18) = 2 \times 3 = 6$

Luego, las variables comunes de $12a^4b$ y $18a^3b^2$, con sus menores exponentes: a^3b.

Por tanto, el máximo común divisor de $12a^4b$ y $18a^3b^2$ es: $\text{mcd}\,(12a^4b, 18a^3b^2) = 6a^3b$

El procedimiento para hallar el mcd de los monomios $25m^3y^2$ y $10m^4y$ es el siguiente:

Primero, el máximo común divisor de 25 y 10 es 5 ya que 5 es el mayor de los divisores comunes de 25 y 10.

Luego, las variables comunes de $25m^3y^2$ y $10m^4y$ con su menor exponente son m^3y.

Por tanto, el máximo común divisor de $25m^3y^2$ y $10m^4y$ es: $(25m^3y^2, 10m^4y) = 5m^3y$

Cuando los monomios no tienen factores comunes diferentes de 1, se dice que los monomios son primos relativos. Por ejemplo, $7x^2$ y $-2y^3z$ son monomios primos relativos.

Máximo común divisor de polinomios

Actividad

El máximo común divisor de dos o más polinomios se determina como sigue:

- **Primero,** se descomponen los polinomios en factores primos, es decir, se factoriza cada polinomio.
- **Luego,** se determinan los factores comunes.
- **Por último,** se escribe el máximo común divisor que está formado por los factores comunes que aparecen en la factorización, elevados a la menor potencia.

Por ejemplo, para hallar el máximo común divisor de $2x^2 - 6x - 20$ y $6x^2 - 24$, se tiene que:

Primero, se factoriza cada polinomio así:

$2x^2 - 6x - 20 = 2(x - 5)(x + 2)$

$6x^2 - 24 = 6(x + 2)(x - 2)$

Luego, los factores comunes con su menor exponente son 2 y $(x + 2)$.

Por tanto, el máximo común divisor de $2x^2 - 6x - 20$ y $6x^2 - 24$ es:

$$\text{mcd}\,(2x^2 - 6x - 20, 6x^2 - 24) = 2(x + 2)$$

> ***Recuerda que...***
> Cuando el máximo común divisor de dos polinomios es 1, se dice que los polinomios son primos relativos.

EJEMPLOS

1. Hallar el mcd de los siguientes monomios: $30m^2n^4$; $42m^5n^3$ y $18m^2n^6$.

El máximo común divisor de los coeficientes es:

$\text{mcd}\,(30, 42, 18) = 6$

Las variables comunes con su menor exponente son:

m^2 y n^3.

Por tanto, $\text{mcd}\,(30m^2n^4, 42m^5n^3, 18m^2n^6) = 6m^2n^3$.

2. Buscar el máximo común divisor de los siguientes polinomios.

a. $3x^3 + 15x^2$; $4x^4 + 500x$

Primero, se factoriza cada polinomio, así:

$3x^3 + 15x^2 = 3x^2(x + 5)$

$4x^4 + 500x = 4x(x^3 + 125)$

$= 4x(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

Luego, los factores comunes con su menor exponente son:

x y $(x + 5)$.

Por tanto, el máximo común divisor de los binomios:

$3x^3 + 15x^2$ y $4x^4 + 500x$ es:

$\text{mcd}\,(3x^3 + 15x^2, 4x^4 + 500x) = x(x + 5)$.

b. $a^6 - a^2b^4$; $a^4 - 2a^3b + a^2b^2$; $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3$

Primero, se factoriza cada polinomio, así:

- $a^6 - a^2b^4 = a^2(a^4 - b^4)$
  $= a^2(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
  $= a^2(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
  $= a^2(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
- $a^4 - 2a^3b + a^2b^2 = a^2(a^2 - 2ab + b^2)$
  $= a^2(a - b)^2$
  $= a^2(a - b)^2$
- $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 = a(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
  $= a[(a^3 - a^2b) + (ab^2 - b^3)]$
  $= a[a^2(a - b) + b^2(a - b)]$
  $= a(a - b)(a^2 + b^2)$
  $= a(a - b)(a^2 + b^2)$

Luego, se hallan los factores comunes con su menor exponente, así:

a y $(a - b)$.

Por tanto, el máximo común divisor de:

$a^6 - a^2b^4$, $a^4 - 2a^3b + a^2b^2$ y $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3$ es $a(a - b)$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde. Explica con un ejemplo.

1. ¿Cómo se halla el mcd de dos o más monomios?
2. Si se tienen dos polinomios que no se pueden factorizar, ¿cuál es su mcd?
3. ¿Puede ser que el mcd de dos o más polinomios sea un número?

Completa cada espacio, respecto a cada grupo de monomios.

4. Para $2x^2w^4$ y x^3w

   El mcd de los coeficientes es _____, las variables comunes con su menor exponente son _____.

   Por tanto, el mcd de _____ y _____ es _____.

5. Para $180x^2y^3z^5$, $135x^3yz^2$ y $270x^2y^2z^3$

   El mcd de los coeficientes es _____, las variables comunes con su menor exponente son _____.

   Por tanto, el mcd de _____, _____ y _____ es _____.

Halla el mcd de cada grupo de monomios.

6. $4m^2$, $8m^3$, $24m$
7. $12x^2y$, $6xy^3$, $24x^2y^4$
8. $25mn^3y$, $50xm^2n^2$, $100m^3n^2p$
9. $100xy$, $35x^2y$, $70x^4y^3$

Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

10. El monomio $18a^3bc$ es el mcd de $126a^4b^2c$, $90a^3bc^2$ y de $108a^5b^7c^3$. ( )
11. El mcd de $6x^4y^2$, $4x^3y^4$, $12x^5y^3$ es $2x^2y^3$. ( )
12. Los monomios $63x^{2n+1}y^{2m}$, $21x^{2n}y^{2m-1}$ y $70x^{3n}y^m$ tienen como mcd a $7x^{2n}y^m$. ( )
13. $x - 5$ es el mcd de $25 - x^2$ y $11x - 2x^2 - 5$. ( )

Determina tres monomios diferentes, cuyo mcd sea el indicado en cada caso.

14. $15a^2b$
15. xy^4
16. $11m^2x$
17. $5x$
18. $24xy^3z^2$
19. $4a^4b^6ca^2$
20. $6x^{2n}y^mz^n$
21. $3x^{2n+3}z$

Halla el mcd de cada grupo de polinomios.

22. $x^2 + 6x + 9$; $x^2 - 9$
23. $4a^2 + 16a - 20$; $6a^2 + 60a + 150$
24. $7x^2 - 21x$; $x^3 - 3x^2$
25. $6a^2b^2 - 2ab^2 - 20b^2$; $2a^3b - a^2b - 6ab$
26. $1 - x^6$; $3 - 3x^4$; $1 - x^2$
27. $2xy^4 - 16xy^2 + 32x$; $2xy^3 - 8xy$
28. $m^2 + mn - 6n^2$; $m^2 + 2mn - 3n^2$; $m^2 + 6mn + 9n^2$
29. $ax^3 - 9ab^2x$; $2x^3 - 12bx^2 + 18b^2x$; $2x^2 - 6bx$

Subraya los polinomios que tienen el mcd indicado.

30. $a + 2$

- $a^2 + 2a + 1$
- $a^2 + 7a + 10$
- $a^2 - 4$
- $3a^2 + 4a - 4$
- $a^2 - a - 12$
- $4a^2 + 5a - 6$

31. $3x - 2$

- $3x^2 - x - 2$
- $15x^4 - 100$
- $9x^2 - 12x - 4$
- $21x^2 - 11x - 2$
- $21x^2 - 11x + 2$
- $9x^2 - 4$

32. $2y + 1$

- $2y^2 + 7y + 3$
- $2y^2 + 5y - 3$
- $1 - 4y^2$
- $2y^2 + 7y + 12$
- $6y^2 + 9y - 6$
- $8y^3 + 12y^2 + 6y + 1$

Lee y resuelve.

Se desea cortar los siguientes trazos de madera en partes iguales y de la mayor longitud posible.



33. ¿Cuál será la longitud máxima de cada pieza?
34. ¿Cuántas partes se obtendrán de cada trozo?

1.2 Mínimo común múltiplo

Recurso imprimible Actividad

El **mínimo común múltiplo de dos o más polinomios** es un polinomio de menor coeficiente numérico y de menor grado que es divisible entre cada uno de los polinomios dados.

Mínimo común múltiplo de monomios

El mínimo común múltiplo de dos o más monomios se determina de la siguiente manera:

- **Primero,** se determina el mínimo común múltiplo de los coeficientes dados.
- **Luego,** se indican las variables comunes y no comunes, entre los monomios, con su mayor exponente.
- **Por último,** se escribe el mínimo común múltiplo como el producto del mcm de los coeficientes por las variables que son comunes y no comunes en los monomios con su mayor exponente.

> ***Recuerda que...***
>
> El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor múltiplo común de dichos números.
>
> Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 4, 8 y 12 es 24.

EJEMPLO

Hallar el mcm de los siguientes monomios.

a. $8x^3$ y $12x^2y$

Primero, se determina el mínimo común múltiplo de 8 y 12, a partir de la descomposición en factores primos, así:

8	12	2
4	6	2
2	3	2
1	3	3
1		

$\text{mcm}\ (8, 12) = 2^3 \times 3 = 24$

Luego, se hallan las variables comunes y no comunes de $8x^3$ y $12x^2y$, con su mayor exponente estas son: x^3y.

Por tanto, el mínimo común múltiplo de $8x^3$ y $12x^2y$ es $24x^3y$.

b. $10a^2b^2c^4$, $15ab^4c^3$ y $20a^3b^3c^2$

Primero, el mínimo común múltiplo de 10, 15 y 20, se determina así:

10	15	20	5
2	3	4	2
1	3	2	2
1	3	1	3
1	1	1	

$\text{mcm}\ (10, 15, 20) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Luego, las variables comunes y no comunes de $10a^2b^2c^4$, $15ab^4c^3$ y $20a^3b^3c^2$ con su mayor exponente son: $a^3b^4c^4$.

Por tanto, el mínimo común múltiplo de $10a^2b^2c^4$, $15ab^4c^3$ y $20a^3b^3c^2$ es $60a^3b^4c^4$.

Mínimo común múltiplo de polinomios

El mínimo común múltiplo de dos o más polinomios se determina así:

- **Primero,** se descompone cada polinomio en factores primos.
- **Luego,** se escribe el producto de los factores comunes y no comunes elevados a la mayor potencia con que aparecen en cada factorización.

EJEMPLOS

1. Hallar el mcm de los siguientes polinomios.

a. $x^2 + x - 6; x^2 - 9$

Primero, se factorizan los polinomios, así:

$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ Se factoriza por el trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$.

$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ Se factoriza por diferencia de cuadrados.

Por tanto, el mcm de $x^2 + x - 6$ y $x^2 - 9$ es $(x + 3)(x - 2)(x - 3)$.

b. $a^3 - 2a^2b + ab^2; 6a^5 - 18a^4b + 18a^3b^2 - 6a^2b^3; 9a^8 - 9a^3b^5$

Primero, se factorizan los polinomios, así:

- $a^3 - 2a^2b + ab^2$

$= a(a^2 - 2ab + b^2)$ Se extrae factor común.

$= a(a - b)^2$ Se factoriza por trinomio cuadrado perfecto.

- $6a^5 - 18a^4b + 18a^3b^2 - 6a^2b^3$

$= 6a^2(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$ Se extrae factor común.

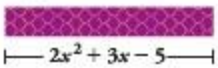
$= 6a^2(a - b)^3$ Se factoriza por cubo perfecto.

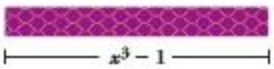
- $9a^8 - 9a^3b^5 = 9a^3(a^5 - b^5)$ Se extrae factor común.

$= 9a^3(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ Se factoriza por diferencia de potencias de igual exponente.

Por tanto, el mcm de $a^3 - 2a^2b + ab^2$; $6a^5 - 18a^4b + 18a^3b^2 - 6a^2b^3$ y $9a^8 - 9a^3b^5$ es $18a^3(a - b)^3(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

2. Determinar la longitud mínima necesaria para construir cintas completas utilizando cualquiera de las cintas que se muestran a continuación.





Para determinar la longitud mínima de la cinta, se halla el mcm de $2x^2 + 3x - 5$ y $x^3 - 1$, así:

- $2x^2 + 3x - 5 = (2x + 5)(x - 1)$ Se factoriza como trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.
- $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ Se factoriza por diferencia de cubos.

De modo que mcm de $2x^2 + 3x - 5$ y $x^3 - 1$ es $(x - 1)(2x + 5)(x^2 + x + 1)$.

Por tanto, la longitud de la cinta es $(x - 1)(2x + 5)(x^2 + x + 1)$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Une cada grupo de monomios con el mcm respectivo.

35. $15x^2z^4$; $30x^3y^6$ — a. $30x^3y^6z^4$
36. x^4y^5z; $x^6y^2z^3$ — b. $81x^2y^5z^8$
37. $16x^3yz^2$; $18xy^4$ — c. $50x^4yz^4$
38. $12x^8z^6$; $5x^4y^2z^2$ — d. $144x^3y^4z^2$
39. $81xy^5z^7$; $27x^2y^2z^8$ — e. $x^6y^5z^3$
40. $25x^4yz$; $10x^3z^4$ — f. $60x^8y^2z^6$

Halla el mcm de los siguientes monomios.

41. a^2; $3ab$; $10ab^3$
42. m^3n^2; m^4n^5; mn^6
43. $-2x^3y$; $4x^4y^2$; $-8x^3y^4$
44. pqr; $p^2q^3r^2$; $p^3q^4r^5$
45. $5a^2$; $10ab^3$; $15a^2b^2$
46. $16xy^2$; $40x^3y^2$
47. $42m^2n^5$; $32m^6n$; $8mn^4$
48. $24x^3y^5z^2$; $6x^5y^2z$; $36xy^7z^4$
49. $18a^4x^2$; $54ax^5$; $36a^6xy^4$; $40a^2x^3y^2$
50. $32x^{3n}y^m$; $40x^{2n}y^{2m}$
51. $6a^{m+2}b^2$; $8a^{2m+3}b^{n+2}$
52. $x^{3n}y^mz^4$; xy^mz; $x^{2n}y^{m-1}z^5$

Organiza dos grupos de tres polinomios que tengan el mismo mcm en cada caso. Justifica tu respuesta.

53. :: $3a^3 + 4a^2 + a$ :: $2a^2 + a - 1$
:: $6a^3 - a^2 - a$ :: $6a^2 - a - 1$
:: $3a^2 + a$ :: $6a^3 + 5a^2 - 2a - 1$

54. :: $12x^2 - 4x - 5$ :: $14x^2 + 3x - 2$
:: $21x^3 + x^2 - 2x$ :: $7x^2 - 2x$
:: $2x^2 + x$ :: $18x^2 - 9x - 5$

55. :: $10m^2 + 13m - 3$ :: $2m + 8$
:: $2m^2 - 5m - 12$ :: $5m^2 - 21m + 4$
:: $2m^2 - 32$ :: $2m^2 + 11m + 12$

56. :: $n^2 - 25$ :: $n + 5$
:: $2n^2 + 10n + 50$ :: $2n + 10$
:: $n^3 - 125$ :: $2n - 10$

Escribe las expresiones que cumplan la condición dada. Explica tu respuesta.

57. Tres monomios con mcm igual a $12x^2y^5z^6$.
58. Dos polinomios cuyo mcm es:
$(x - 1)^2(x + 1)(2x + 3)$
59. Tres polinomios con mcm igual a:
$60x^4(2x - 3)(x + 2)^2$
60. Cuatro polinomios con mcm igual a:
$125a^3(3a + 1)(a - 5)(a + 5)(a + 1)$.

Halla el mcm de los denominadores para cada grupo de fracciones.

61. $\frac{x-1}{x^2+xy}; \frac{5-y}{xy+y^2}; \frac{6x+3}{x^3+x^2y}$
62. $\frac{a+4}{4a^2-b^2}; \frac{b^2-4}{8a^3+b^3}; \frac{a-b}{4a^2+2ab+b^2}$
63. $\frac{x+1}{(y^2-1)^2}; \frac{y+1}{y^2+4y-5}; \frac{x^3-1}{y^4-1}$
64. $\frac{1}{x^2-25}; \frac{1}{(x-5)^2}; \frac{3}{x^2-10x+25}$
65. $\frac{a}{3a^2-8a}; \frac{b}{5a}; \frac{c}{a^3-a^2}$

Lee, observa y resuelve.

Con cada una de las siguientes figuras, se desea realizar un cubrimiento de una misma región, de tal forma que la cubre totalmente.



$A = x^2 + 13x + 40$



$A = 3x^2 + 16x + 5$

66. Determina la expresión del área de la región mínima para realizar el cubrimiento.
67. Comprueba los resultados obtenidos en el anterior punto para $x = 2$.
68. Realiza la representación gráfica de cada cubrimiento si $x = 2$.

Enlace web Actividad Recurso imprimible

2. Expresiones algebraicas racionales

Una **expresión algebraica racional** o **fracción algebraica** es el cociente indicado de dos polinomios.

Por ejemplo, en las expresiones algebraicas: $\frac{12}{x}, \frac{\sqrt{7}}{a-2}, \frac{x}{x^2-y^2}, \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}, \frac{8+n}{n^2+1}$

se observa que:

- Indican el cociente de polinomios, escrito en forma de fracción.
- En los denominadores de cada fracción, aparece una o más variables.

Así, en la fracción algebraica $\frac{x}{x^2-y^2}$ $\longrightarrow$ numerador, $\longrightarrow$ denominador

Es importante aclarar que estas expresiones están definidas siempre y cuando el denominador sea diferente de cero.

Las fracciones algebraicas cumplen las mismas propiedades de los números racionales.

- Al multiplicar tanto el numerador como el denominador por una expresión diferente de cero, se obtiene una fracción algebraica equivalente.

  Por ejemplo, en la fracción $\frac{x+3}{x^2-y^2}$ al multiplicar el numerador y el denominador por $6xy$, se tiene que:

  $$\underbrace{\frac{x+3}{x^2-y^2}}_{\text{Fracción algebraica}} \cdot \frac{6xy}{6xy} = \underbrace{\frac{6x^2y+18xy}{6x^3y-6xy^3}}_{\text{Fracción equivalente}}$$

- El signo de una fracción algebraica depende del signo del numerador y del denominador. Es decir, $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

- Se puede cambiar el signo de una fracción algebraica cambiando uno a uno los signos de todos los términos del numerador o los signos de todos los términos del denominador. Si se cambian los signos en el numerador y en el denominador, se obtiene una fracción equivalente.

  Por ejemplo, para obtener una fracción algebraica equivalente a $\frac{x-2}{x^2-1}$ cambiando los signos, se tiene que: $\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{-x+2}{-x^2+1} = \frac{2-x}{1-x^2}$

Matemáticamente

¿Por cuál polinomio se deben multiplicar tanto el numerador como el denominador de la fracción $\frac{x-1}{x+2}$ para obtener una fracción equivalente cuyo denominador sea igual a x^2-4?

EJEMPLO

Hallar dos expresiones algebraicas equivalentes a $\frac{m-1}{m-2}$ que estén precedidas del signo menos.

Se deben cambiar los signos presentes en la fracción así:

- $\frac{m-1}{m-2} = -\frac{-(m-1)}{m-2} = -\frac{1-m}{m-2}$ Se cambia el signo a la fracción y al numerador.
- $\frac{m-1}{m-2} = -\frac{m-1}{-(m-2)} = -\frac{m-1}{2-m}$ Se cambia el signo a la fracción y al denominador.

Luego, las fracciones $-\frac{1-m}{m-2}$ y $-\frac{m-1}{2-m}$ son equivalentes a $\frac{m-1}{m-2}$.

2.1 Simplificación de fracciones algebraicas

Ampliación multimedia

Simplificar una fracción algebraica es convertirla en una fracción equivalente cuyos elementos (numerador y denominador) no tengan divisores comunes.

Cuando el numerador y el denominador de una fracción no tienen factores comunes diferentes de 1 o -1, se dice que la fracción es **irreducible** y por lo tanto, la fracción está reducida a su mínima expresión.

Simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y denominador son monomios

Para simplificar una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son monomios, se realiza la división entre sus factores comunes, así:

- Se simplifican sus coeficientes.
- Se aplican las propiedades para el cociente de potencias de igual base. Esto es:

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$ $\qquad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ si $m < n$

Recuerda que...

Si dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se descomponen en factores y tienen por lo menos un factor común, la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una expresión reducible.

EJEMPLOS

Simplificar cada una de las siguientes fracciones algebraicas.

a. $\frac{10a^2}{5ab}$

$\frac{10a^2}{5ab} = \frac{2 \cdot a^2}{1 \cdot ab}$ Se simplifican sus coeficientes.

$= \frac{2a^{2-1}}{b} = \frac{2a}{b}$ Se aplica la propiedad del cociente de potencias de igual base.

Por tanto, $\frac{10a^2}{5ab} = \frac{2a}{b}$.

b. $\frac{18x^5y^7z^{12}}{30x^9y^4z^8}$

$\frac{18x^5y^7z^{12}}{30x^9y^4z^8} = \frac{3x^5y^7z^{12}}{5x^9y^4z^8}$ Se simplifican sus coeficientes.

$= \frac{3y^{7-4}z^{12-8}}{5x^{9-5}} = \frac{3y^3z^4}{5x^4}$ Se aplica la propiedad del cociente de potencias de igual base y se resta.

Por tanto, $\frac{18x^5y^7z^{12}}{30x^9y^4z^8} = \frac{3y^3z^4}{5x^4}$.

c. $\frac{8x^{n+1}y^{3m}}{4x^ny^{m-2}}$

$\frac{8x^{n+1}y^{3m}}{4x^ny^{m-2}} = \frac{2x^{n+1}y^{3m}}{x^ny^{m-2}}$ Se simplifican sus coeficientes.

$= 2x^{n+1-n}y^{3m-(m-2)} = 2xy^{2m+2}$ Se aplica la propiedad del cociente de potencias de igual base. Se realizan operaciones en el exponente.

Por tanto, $\frac{8x^{n+1}y^{3m}}{4x^ny^{m-2}} = 2xy^{2m+2}$

Matemáticamente

¿A qué expresión debe ser igual $Q(x)$ para que la fracción $\frac{3x^2+5x-2}{Q(x)}$ sea igual a -1?

Simplificación de fracciones algebraicas cuyos numerador y denominador son polinomios

Recurso imprimible

Para simplificar una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son polinomios se aplica el siguiente proceso:

- **Primero,** se descomponen los polinomios del numerador y del denominador en factores primos.
- **Luego,** se dividen o se simplifican los factores primos comunes del numerador con los del denominador.

EJEMPLOS

Simplificar las siguientes fracciones algebraicas.

a. $\dfrac{x^2+x}{x+1}$

$= \dfrac{x(x+1)}{x+1}$ Se factoriza el numerador.

$= \dfrac{x(x+1)}{x+1} \div \dfrac{x+1}{x+1} = x$ Se dividen el numerador y el denominador entre el factor primo $x+1$.

Por tanto, $\dfrac{x^2+x}{x+1} = x$

b. $\dfrac{a^3+a^2}{ab+b}$

$= \dfrac{a^2(a+1)}{b(a+1)}$ Se factorizan el numerador y el denominador.

$= \dfrac{a^2(a+1)}{b(a+1)} \div \dfrac{a+1}{a+1} = \dfrac{a^2}{b}$ Se dividen el numerador y el denominador entre el factor primo común $a+1$.

Por tanto, $\dfrac{a^3+a^2}{ab+b} = \dfrac{a^2}{b}$.

c. $\dfrac{4x^2+8x-12}{6x^2-6}$

$= \dfrac{2(x+3)\cancel{(x-1)}}{3(x+1)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{2(x+3)}{3(x+1)}$ Se factorizan el numerador y el denominador y se simplifican los factores primos comunes.

Por tanto, $\dfrac{4x^2+8x-12}{6x^2-6} = \dfrac{2(x+3)}{3(x+1)}$.

d. $\dfrac{10m-2m^2}{2m^2-7m-15}$

$= \dfrac{2m(5-m)}{(2m+3)(m-5)}$ Se factorizan el numerador y el denominador.

$= -\dfrac{2m\cancel{(m-5)}}{(2m+3)\cancel{(m-5)}}$ Se cambia el signo de la fracción y del factor $(5-m)$.

$= -\dfrac{2m}{2m+3}$ Se simplifica el factor común.

Por tanto, $\dfrac{10m-2m^2}{2m^2-7m-15} = -\dfrac{2m}{2m+3}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

I 69. Organiza la información de las siguientes fichas, para definir una fracción algebraica.

Fracción algebraica es			denominador
aparecen una o más			escrito
variables			el cociente de
dos polinomios			en forma de
en el	fracción		donde

I Escribe una fracción algebraica para cada condición.

70. El numerador es un monomio.

71. El numerador y denominador son binomios.

72. El denominador tiene un término más que el numerador.

E Amplifica cada fracción algebraica por la expresión dada.

73. $\frac{5-x}{x+4}$ por $\frac{x^2}{x^2}$

74. $\frac{a}{a+4}$ por $\frac{5a^3}{5a^3}$

75. $\frac{y-3}{y+4}$ por $\frac{y-1}{y-1}$

76. $\frac{4x^2-y}{x^2-3y}$ por $\frac{x+y}{x+y}$

77. $\frac{x^2+x+1}{x+4}$ por $\frac{x-1}{x-1}$

A Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

78. Cambiar de signo de una fracción equivale a multiplicar y dividir por -1 la fracción. ( )

79. Cuando se simplifica $\frac{x^3+x^2}{x^3}$ se obtiene x^3. ( )

80. $\frac{3-2x}{x^2}$ es equivalente con $\frac{2x-3}{x^2}$. ( )

81. La expresión simplificada de $\frac{9-x^2}{3-x} = 3-x$. ( )

E Escribe dos fracciones equivalentes a cada fracción algebraica dada, amplificada.

82. $\frac{x-4}{x+5}$

83. $\frac{x^2+9}{3-2x}$

84. $\frac{x^3+4x}{x+5}$

85. $\frac{x^2-a^2}{x^2+a}$

E Simplifica las siguientes fracciones.

86. $\frac{120a^4y^5}{45a^2y^3}$

87. $\frac{42x^{11}y^8z^7}{72x^9yz^8}$

88. $\frac{-54m^5n^{15}p^8}{-162m^7n^{20}p^{10}}$

89. $\frac{x^2-49}{x+7}$

90. $\frac{a^3+8}{3a^2+a-10}$

91. $\frac{3m+m^2}{m^2+6m+9}$

92. $\frac{x^2-y^2}{x^4-y^4}$

93. $\frac{2n^2-4n-6}{8n^3+8}$

P Determina dos fracciones equivalentes a cada fracción cambiando el signo del denominador.

94. $\frac{2a+9b}{-6a^2b}$

95. $\frac{6x+12y}{x^2+xy-2y^2}$

96. $\frac{8c-cd}{2cd-16c}$

97. $\frac{-2x-5}{-10-3x}$

R Halla la expresión reducida de cada fracción algebraica.

98. $\frac{3x^2-10x+3}{3x^2-7x+2}$

99. $\frac{18n^2m+27nm^2}{4n^2+12nm+9m^2}$

100. $\frac{2ax^2+2axy-bxy-by^2}{6abx^2-3b^2xy}$

101. $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$

102. $\frac{(m+n)^3}{m^3+n^3}$

103. $\frac{6t^2+5t-6}{15t^2-7t-2}$

104. $\frac{m^2-m-20}{m^2-7m+10}$

105. $\frac{n^3+1}{n^4-n^3+n-1}$

106. $\frac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-15}$

S Lee y resuelve.

Ángela analiza el funcionamiento de un horno para hacer tortas, se debe controlar la densidad durante la cocción de la torta. Inicialmente una torta tiene masa de m gramos y un volumen de V cm³, su densidad es $\frac{m}{V}$. Si por cada minuto de cocción, la torta disminuye su masa en 2 g y su volumen aumenta en 50 cm³:

107. Determina la densidad de la torta después de t minutos.

3. Operaciones entre fracciones algebraicas

Ampliación multimedia

Con las fracciones algebraicas se pueden realizar operaciones básicas como la adición, la sustracción, la multiplicación y la división, entre otros.

3.1 Adición y sustracción de fracciones algebraicas

En la adición y sustracción de fracciones algebraicas, al igual que en la de números fraccionarios, los términos de cada operación tienen igual denominador o distinto denominador. A continuación se explicará la adición y la sustracción de fracciones con igual denominador.

Adición de fracciones algebraicas con igual denominador

Para sumar dos o más fracciones algebraicas cuyos denominadores son iguales se realiza el siguiente procedimiento:

- **Primero,** se suman los polinomios del numerador.
- **Luego,** se escribe el mismo denominador.
- **Después,** se factorizan el numerador y el denominador si es posible.
- **Por último,** se simplifica la fracción algebraica obtenida.

EJEMPLO

Resolver cada una de las siguientes operaciones.

a. $\frac{8n^2m}{4nm^3} + \frac{6n^4m^2}{4nm^3} + \frac{12nm^3}{4nm^3}$

Los denominadores de las fracciones son iguales: $4nm^3$. Se tiene que:

$= \frac{8n^2m + 6n^4m^2 + 12nm^3}{4nm^3}$ Se suman los numeradores y se escribe el denominador común.

$= \frac{2nm\,(4n + 3n^3m + 6m^2)}{4nm^3}$ Se factoriza el numerador.

$= \frac{4n + 3n^3m + 6m^2}{2m^2}$ Se simplifica.

Por tanto, $\frac{8n^2m}{4nm^3} + \frac{6n^4m^2}{4nm^3} + \frac{12nm^3}{4nm^3} = \frac{4n + 3n^3m + 6m^2}{2m^2}$.

b. $\frac{18x^2}{x^2 - 1} + \frac{23x}{x^2 - 1} + \frac{5}{x^2 - 1}$

Los denominadores de todas las fracciones son iguales: $x^2 - 1$. Se tiene que:

$= \frac{18x^2 + 23x + 5}{x^2 - 1}$ Se suman los numeradores y se escribe el denominador común.

$= \frac{(18x + 5)\cancel{(x + 1)}}{\cancel{(x + 1)}(x - 1)}$ Se factorizan el numerador y el denominador.

$= \frac{18x + 5}{x - 1}$ Se simplifica.

Por tanto, $\frac{18x^2}{x^2 - 1} + \frac{23x}{x^2 - 1} + \frac{5}{x^2 - 1} = \frac{18x + 5}{x - 1}$.

Sustracción de fracciones algebraicas con igual denominador

Para restar dos o más fracciones algebraicas cuyos denominadores son iguales se realiza el siguiente procedimiento:

- **Primero,** se restan los polinomios del numerador.
- **Luego,** se escribe el mismo denominador.
- **Después,** se factoriza el numerador y el denominador si es posible.
- **Por último,** se simplifica la fracción algebraica obtenida.

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes restas.

a. $-\frac{3x^2y^4}{5x^2y^4} - \frac{8x^3y^2}{5x^2y^4}$

Primero, se restan los numeradores y se escribe el denominador común, así:

$$\frac{-3x^2y^4 - 8x^3y^2}{5x^2y^4}$$

Luego, se factoriza el numerador y se simplifica.

$$-\frac{x^2y^2(3y^2 + 8x)}{5x^2y^4} = -\frac{3y^2 + 8x}{5y^2}$$

Por tanto, $\frac{-3x^2y^4}{5x^2y^4} - \frac{8x^3y^2}{5x^2y^4} = -\frac{3y^2 + 8x}{5y^2}$.

b. $\frac{x^2 + 5x}{x^3 + 2x^2 + x} - \frac{2x - 2x^2}{x^3 + 2x^2 + x}$

Primero, se restan los numeradores y se escribe el denominador común, así:

$$\frac{x^2 + 5x - (2x - 2x^2)}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Luego, se resuelven las operaciones en el numerador.

$$\frac{x^2 + 5x - 2x + 2x^2}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{3x^2 + 3x}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Después, se factorizan el numerador y el denominador, y se simplifica así:

$$\frac{3x(x + 1)}{x(x + 1)^2} = \frac{3}{x + 1}$$

Por tanto, $\frac{x^2 + 5x}{x^3 + 2x^2 + x} - \frac{2x - 2x^2}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{3}{x + 1}$.

c. $\frac{5x^3 - 1}{x^2 + 1} - \frac{4x^2 + 3x^3 + 2}{x^2 + 1}$

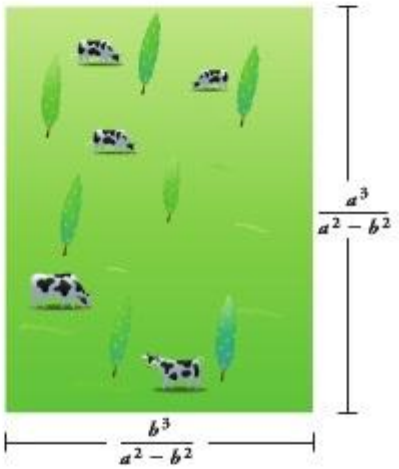
Primero, se restan los numeradores y se escribe el denominador común, y se simplifica así:

$$\frac{5x^3 - 1 - (4x^2 + 3x^3 + 2)}{x^2 + 1} = \frac{5x^3 - 1 - 4x^2 - 3x^3 - 2}{x^2 + 1}$$

Luego, se resuelven las operaciones así:

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

2. Determinar la expresión que representa la diferencia entre el largo y el ancho del terreno que se muestra en la siguiente figura.



Para determinar la diferencia entre el largo y el ancho del rectángulo:

Primero, se identifica el largo y el ancho.

largo: $\frac{a^3}{a^2 - b^2}$

ancho: $\frac{b^3}{a^2 - b^2}$.

Luego, se realiza la diferencia, así:

$$\frac{a^3}{a^2 - b^2} - \frac{b^3}{a^2 - b^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$$

Después, se factorizan el numerador y el denominador, y se simplifica.

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a + b)(a - b)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

Por tanto, la expresión que representa la diferencia entre el largo y el ancho es $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Ubica cada expresión en un solo cuadro, de tal forma que la igualdad sea válida. Debes usar todas las expresiones y solo una se puede repetir varias veces.

108. $4x^2y^2$; $6xy$; $12x^2y^4$; $2xy$; 3 $\quad \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{6xy^3 + 2xy + 1}{\square}$

109. $5m$; $8m^2n^3$; mn^3; $11m$ $\quad \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{2}{\square}$

110. $x + 6$; $3x^2$; $12x^2$; $5x^2$; $4x^2$ $\quad \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Realiza las siguientes operaciones. Luego, simplifica.

111. $\frac{2x^2y}{x+y} + \frac{5x^3y}{x+y}$

112. $\frac{12a^4b^3c}{15abc^2} - \frac{7a^4b^3c}{15abc^2} - \frac{30a^4b^3c}{15abc^2}$

113. $\frac{m^2}{m+n} + \frac{2mn}{m+n} + \frac{n^2}{m+n}$

114. $\frac{5x^2 + 10x}{x^2 + 3x - 10} - \frac{x+2}{x^2 + 3x - 10}$

115. $\frac{x^2 + 3x - 2}{x-1} + \frac{2x+4}{x-1} + \frac{x - x^2 - 1}{x-1} + \frac{x-6}{x-1}$

116. $\frac{4a^2 - 4}{a^2 - 4} - \frac{2a^2 - 8a}{a^2 - 4} - \frac{22a - a^2 - 20}{a^2 - 4}$

117. $\frac{4mn^2 - 3m^2n}{m^3 + n^3} + \frac{m^3 - mn^2}{m^3 + n^3} + \frac{mn^2 - 4n^3}{m^3 + n^3}$

118. $\frac{x^2y - 7xy}{10x^2 + xy - 21y^2} - \frac{7xy - x^2y - xy^2}{10x^2 + xy - 21y^2} - \frac{21y^2 - 2xy^2}{10x^2 + xy - 21y^2}$

Escribe tres fracciones algebraicas de igual denominador cuya suma sea la indicada.

119. $\frac{2}{7x^2y}$

120. $\frac{-4}{mn^3}$

121. $\frac{8-x}{xy^3}$

122. $\frac{4n-1}{2n}$

123. $\frac{3a^2 - 1}{6a - 4}$

124. $\frac{2x+7}{x^2 + 6x + 5}$

125. $\frac{4y+1}{2y^2 - 3y - 9}$

126. $\frac{10x - x^2 - 29}{x^2 - 49}$

Halla la expresión racional en cada caso. Justifica tu respuesta.

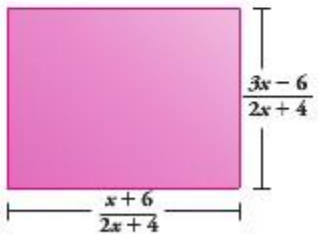
127. Una expresión que sumada con $\frac{2}{5a-3}$, su resultado sea $\frac{7a-5}{5a-3}$.

128. Una expresión que restada de $\frac{x}{x^2 + x - 2}$, su diferencia sea $\frac{3}{x+2}$.

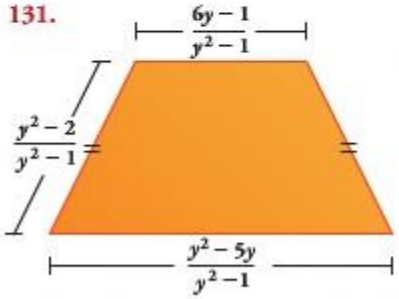
129. Una expresión que al ser restada de $\frac{a^2 - 3}{10a + 5}$, se reduzca $\frac{a+3}{5}$.

Determina el perímetro de cada una de las siguientes figuras.

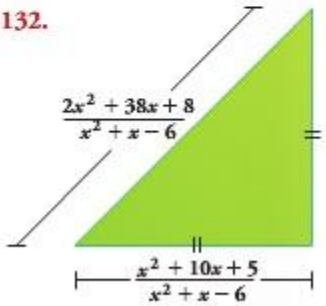
130.



131.



132.



Adición de fracciones algebraicas con diferente denominador

Recurso imprimible Actividad

Para sumar dos o más fracciones algebraicas cuyos denominadores son diferentes, se realiza el siguiente procedimiento.

- **Primero,** se determina el mínimo común múltiplo de los denominadores. Esta expresión se conoce como **mínimo común denominador**.
- **Segundo,** se escribe cada expresión algebraica como una fracción equivalente cuyo denominador es el mínimo común denominador.
- **Después,** se suman las expresiones del numerador y se escribe el resultado sobre el denominador común.
- **Por último,** se simplifica si es posible.

EJEMPLOS

Realizar las siguientes sumas de fracciones.

a. $\frac{6a^2b}{4ab^2} + \frac{8ab^2}{3a} + \frac{4ab}{2a^2b}$

mcm $(4ab^2, 3a, 2a^2b) = 12a^2b^2$ Se halla el mcm de los denominadores.

$= \frac{18a^3b}{12a^2b^2} + \frac{32a^2b^4}{12a^2b^2} + \frac{24ab^2}{12a^2b^2}$ Se escriben fracciones equivalentes con denominador común.

$= \frac{18a^3b + 32a^2b^4 + 24ab^2}{12a^2b^2}$ Se suman los numeradores y se deja el denominador común.

$= \frac{2ab(9a^2 + 16ab^3 + 12b)}{12a^2b^2}$ Se factoriza el numerador.

$= \frac{9a^2 + 16ab^3 + 12b}{6ab}$ Se simplifica.

Por tanto, $\frac{6a^2b}{4ab^2} + \frac{8ab^2}{3a} + \frac{4ab}{2a^2b} = \frac{9a^2 + 16ab^3 + 12b}{6ab}$.

b. $\frac{3-a}{a^2-1} + \frac{a}{a-1} + \frac{2}{a+1}$

$\frac{3-a}{(a+1)(a-1)} + \frac{a}{a-1} + \frac{2}{a+1}$ Se factorizan los denominadores y se halla el mcm.

mcm $(a^2 - 1, a - 1, a + 1) = (a + 1)(a - 1)$

$\frac{3-a}{(a+1)(a-1)} + \frac{a(a+1)}{(a+1)(a-1)} + \frac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)}$ Se escriben fracciones equivalentes con denominador común.

$= \frac{3 - a + a(a+1) + 2(a-1)}{(a+1)(a-1)}$ Se suman los numeradores y se deja el denominador común.

$= \frac{3 - a + a^2 + a + 2a - 2}{(a+1)(a-1)}$ Se multiplica.

$= \frac{a^2 + 2a + 1}{(a+1)(a-1)}$ Se reducen términos semejantes.

$= \frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-1)}$ Se factoriza el numerador.

$= \frac{a+1}{a-1}$ Se simplifica.

Por tanto, $\frac{3-a}{a^2-1} + \frac{a}{a-1} + \frac{2}{a+1} = \frac{a+1}{a-1}$.

Sustracción de fracciones algebraicas con diferente denominador

Para restar dos o más fracciones algebraicas cuyos denominadores son diferentes, se realiza el siguiente procedimiento:

- **Primero,** se determina el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- **Segundo,** se escribe cada expresión algebraica como una fracción equivalente cuyo denominador es el mínimo común denominador.
- **Después,** se restan las expresiones del numerador y se escribe el resultado sobre el denominador común.
- **Por último,** se simplifica si es posible.

EJEMPLOS

Realizar las siguientes sustracciones.

a. $\dfrac{3x+2}{10x} - \dfrac{3-2y}{3y} - \dfrac{y-x}{5xy}$

$\text{mcm}\,(10x, 3y, 5xy) = 30xy$ — Se halla el mcm de los denominadores.

$\dfrac{3y(3x+2)}{30xy} - \dfrac{10x(3-2y)}{30xy} - \dfrac{6(y-x)}{30xy}$ — Se escriben fracciones equivalentes con denominador común.

$= \dfrac{3y(3x+2) - 10x(3-2y) - 6(y-x)}{30xy}$ — Se restan los numeradores y se deja el denominador común.

$= \dfrac{9xy + 6y - 30x + 20xy - 6y + 6x}{30xy}$ — Se multiplica.

$= \dfrac{29xy - 24x}{30xy}$ — Se reducen términos semejantes.

$= \dfrac{29y - 24}{30y}$ — Se simplifica.

Por tanto, $\dfrac{3x+2}{10x} - \dfrac{3-2y}{3y} - \dfrac{y-x}{5xy} = \dfrac{29y-24}{30y}$.

b. $\dfrac{x}{x^2-2x+1} - \dfrac{1}{x^2+4x-5}$

$\dfrac{x}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x+5)(x-1)}$ — Se factorizan los denominadores.

$\text{mcm}\,((x-1)^2, (x+5)(x-1)) = (x-1)^2(x+5)$ — Se halla el mcm de los denominadores.

$\dfrac{x(x+5)}{(x-1)^2(x+5)} - \dfrac{(x-1)}{(x+5)(x-1)^2}$ — Se escriben fracciones equivalentes con denominador común.

$= \dfrac{x(x+5) - (x-1)}{(x-1)^2(x+5)}$ — Se restan los numeradores y se deja el denominador común.

$= \dfrac{x^2 + 5x - x + 1}{(x-1)^2(x+5)}$ — Se multiplica.

$= \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)^2(x+5)}$ — Se reducen términos semejantes.

Por tanto, $\dfrac{x}{x^2-2x+1} - \dfrac{1}{x^2+4x-5} = \dfrac{x^2+4x+1}{(x-1)^2(x+5)}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Relaciona cada suma con su respectivo resultado.

133. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ **134.** $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x-y}$ **135.** $x+\frac{1}{y}$ **136.** $\frac{x}{y}+1$

a. $\frac{x+y}{x-y}$ **b.** $\frac{xy+1}{y}$ **c.** $\frac{x+y}{y}$ **d.** $\frac{y+x}{xy}$

Resuelve las siguientes sumas de fracciones algebraicas.

137. $\frac{5n}{4m}+\frac{3}{2m^2}$

138. $\frac{x+y}{2x^2}+\frac{5-x}{6x}+\frac{y-7}{20x^3}$

139. $\frac{n+m}{n^2-nm}+\frac{n+m}{nm+m^2}$

140. $\frac{1}{a+a^2}+\frac{3}{a-a^2}+\frac{8+a}{1-a^2}$

141. $\frac{2}{m-5}+\frac{1-m}{m^2-1}+\frac{12-m^2}{m^3-5m^2-m+5}$

142. $\frac{2x}{x^2+3x+2}+\frac{x+4}{x^2-4}+\frac{2x-3}{x^2-x-2}$

Indica las operaciones que son correctas. Luego, corrige las que no lo están.

143. $\frac{x-1}{x^2+x}-\frac{1}{2x+2}-\frac{1}{2x-2}=\frac{1+2x}{x(1-x^2)}$

144. $\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{y}{x^2+xy}=\frac{y^2}{x(x^2-y^2)}$

145. $\frac{a}{a^2-ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b-a}=\frac{2}{b-a}$

146. $\frac{2x-1}{x^2+5x-6}-\frac{3+x}{x^2+2x-3}=\frac{x-1}{(x+5)(x-2)}$

147. $\frac{1}{n-3m}-\frac{n^2+9m^2}{n^3-27m^3}-\frac{n}{n^2+3nm+9m^2}=\frac{n}{m}$

148. $\frac{2n-3}{10n+10}-\frac{1+n}{50n}-\frac{11n^2-15n-1}{50n^2+50n}=-\frac{1}{25}$

Escribe la expresión algebraica en cada caso.

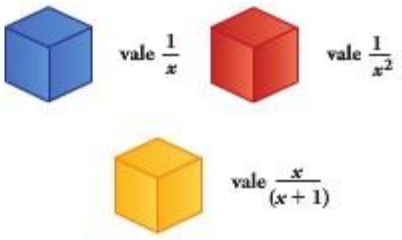
149. Si $\frac{xy-2}{5x^2y}$ es la diferencia y $\frac{4x-1}{15x^2y^2}$ es el minuendo, ¿cuál es el sustraendo?

150. ¿Qué fracción algebraica sumada con $\frac{2x}{x+3}$ da como resultado $\frac{x-2}{x-3}$?

151. ¿Qué expresión se debe restar de $\frac{3m+2n}{2m-n}$ para que la diferencia sea $\frac{2m+3n}{4m^2+2mn+n^2}$?

Lee, observa y resuelve.

Si cada cubo del mismo color tiene el valor indicado, halla la expresión algebraica de cada grupo de cubos.



152. 

153. 

154. 

155. 

156. 

Lee y plantea una solución.

157. Dos personas discuten acerca de unos cambios que desean realizar en un terreno rectangular cuyo largo mide b m y su área es de a m². Una de ellas desea aumentar el área en 1 m² sin cambiar el largo, pero la otra quiere aumentar el largo del terreno en 1 m sin cambiar el área; necesitan determinar en qué caso es mayor el ancho del terreno.

Adición y sustracción combinados

Recurso imprimible · Ampliación multimedia

Para realizar las operaciones combinadas de adición y sustracción de fracciones algebraicas se tiene en cuenta:

- Si son fracciones con igual denominador, se suman o restan los numeradores y se coloca el mismo denominador.
- Si son fracciones con denominadores diferentes, se determina el mínimo común denominador, luego se escriben fracciones equivalentes con igual denominador. Por último, se resuelven las operaciones.

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes operaciones.

a. $\frac{7}{4x} - \frac{5x-1}{4x} + \frac{x-8}{4x}$

$= \frac{7-(5x-1)+(x-8)}{4x}$ Se suman y restan los numeradores y se escribe el denominador común.

$= \frac{7-5x+1+x-8}{4x}$ Se eliminan signos de agrupación.

$= \frac{-4x}{4x} = -1$ Se reducen términos semejantes y se simplifica.

Por tanto, $\frac{7}{4x} - \frac{5x-1}{4x} + \frac{x-8}{4x} = -1$.

b. $\frac{a}{a-1} + \frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a+1}$

mcm $(a-1, a, a+1) = a(a+1)(a-1)$ Se halla el mcm de los denominadores.

$\frac{a \cdot a(a+1)}{a(a+1)(a-1)} + \frac{(a+1)(a+1)(a-1)}{a(a+1)(a-1)} - \frac{a(a-1)(a-1)}{a(a+1)(a-1)}$ Se escriben fracciones equivalentes con denominador común.

$= \frac{a^2(a+1)+(a+1)(a+1)(a-1)-a(a-1)(a-1)}{a(a+1)(a-1)}$ Se suman y restan los numeradores y se deja el denominador común.

$= \frac{(a^3+a^2)+(a^3+a^2-a-1)-(a^3-2a^2+a)}{a(a+1)(a-1)}$ Se multiplica.

$= \frac{a^3+a^2+a^3+a^2-a-1-a^3+2a^2-a}{a(a+1)(a-1)}$ Se eliminan paréntesis.

$= \frac{a^3+4a^2-2a-1}{a(a+1)(a-1)}$ Se reducen términos semejantes.

Por tanto, $\frac{a}{a-1} + \frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a+1} = \frac{a^3+4a^2-2a-1}{a(a+1)(a-1)}$.

c. $\frac{5}{y} - \frac{8}{y^2} + \frac{11}{y^3}$

mcm $(y, y^2, y^3) = y^3$ Se halla el mcm de los denominadores.

$\frac{5y^2}{y^3} - \frac{8y}{y^3} + \frac{11}{y^3}$ Se escriben fracciones equivalentes con denominador común.

$= \frac{5y^2-8y+11}{y^3}$ Se suman y restan los numeradores y se deja el denominador común.

Por tanto, $\frac{5}{y} - \frac{8}{y^2} + \frac{11}{y^3} = \frac{5y^2-8y+11}{y^3}$.

2. Leer y resolver.

Un circuito electrónico es un conjunto de medios conductores por los cuales pasa la corriente eléctrica.

Para conocer la intensidad de la corriente que circula por una parte de un circuito, en el cual hay varias resistencias, estas se combinan en una sola con un valor equivalente.

Cuando las resistencias están conectadas en paralelo, como se muestra en la figura 1, la resistencia equivalente es igual a:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

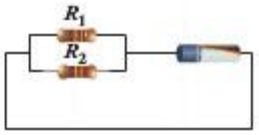


Figura 1.

Hallar la resistencia del circuito de la figura 2, si $x \neq y$.

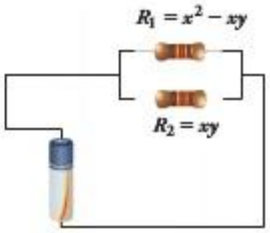


Figura 2.

Para hallar la resistencia equivalente a R_e se tiene:

$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	Se aplica la expresión de R_e.
$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{x^2 - xy} + \frac{1}{xy}$	Se remplazan R_1 por $x^2 - xy$ y R_2 por xy.
$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{x(x - y)} + \frac{1}{xy}$	Se factoriza el denominador.
$\frac{1}{R_e} = \frac{y}{xy(x - y)} + \frac{x - y}{xy(x - y)}$	Se escriben fracciones equivalentes con denominador común.
$\frac{1}{R_e} = \frac{y + (x - y)}{xy(x - y)}$	Se suman los numeradores y se deja el denominador común.
$\frac{1}{R_e} = \frac{x}{xy(x - y)}$	Se reducen términos semejantes.
$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{y(x - y)}$	Se simplifica.
$R_e = y(x - y)$	Se invierte cada fracción.

Por tanto, la resistencia equivalente del circuito es $y(x - y)$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo

Calcula cada expresión si

$A = \frac{1}{x^2 - 1}$, $B = \frac{3}{2x - 2}$ y $C = \frac{3}{3x + 3}$.

158. $A + B - C$ **159.** $A - B + C$

Realiza las siguientes operaciones.

160. $\frac{12 + 3x}{x + 6} - \frac{3 + 8x}{x + 6} + \frac{3 + 7x}{x + 6}$

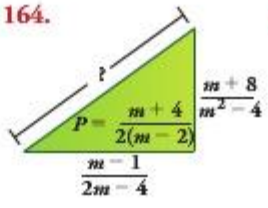
161. $\frac{b^2 + 6b - 7}{b - 5} - \frac{b^2 - 5b}{b - 5} + \frac{b + 8}{5 - b}$

162. $\frac{y + 12}{12y + 24} + \frac{y}{3y + 6} - \frac{1}{6y + 12}$

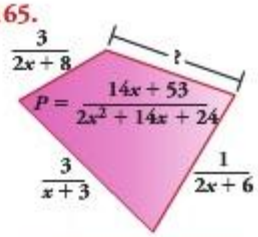
163. $\frac{1}{ax} - \frac{1}{a^2 + ax} + \frac{1}{a + x} - \frac{2}{a^2 - x^2}$

Determina la dimensión que se desconoce en cada figura.

164.



165.



3.2 Multiplicación de fracciones algebraicas

Recurso imprimible

Para multiplicar fracciones algebraicas se siguen estos pasos:

- **Primero,** se descomponen los términos de cada expresión racional en factores primos.
- **Luego,** se simplifican los factores comunes.
- **Por último,** se multiplican los numeradores y denominadores en la misma forma como se multiplican fracciones aritméticas.

EJEMPLOS

1. Resolver los siguientes productos.

a. $\frac{48x^2y}{5y^4} \times \frac{35xy^2}{36x^5}$

$= \frac{4}{y} \times \frac{7}{3x^2}$ Se simplifican los factores comunes en el numerador y denominador de las fracciones.

$= \frac{28}{3x^2y}$ Se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

Por tanto $\frac{48x^2y}{5y^4} \times \frac{35xy^2}{36x^5} = \frac{28}{3x^2y}$.

b. $\frac{x+2}{(x+3)(4x-1)} \times \frac{(4x+1)(4x-1)}{(x+3)(x+2)}$

$= \frac{\cancel{x+2}}{(x+3)\cancel{(4x-1)}} \times \frac{(4x+1)\cancel{(4x-1)}}{(x+3)\cancel{(x+2)}}$ Se simplifican los factores comunes en el numerador y el denominador.

$= \frac{1}{x+3} \times \frac{4x+1}{x+3}$

$= \frac{4x+1}{(x+3)\cdot(x+3)}$ Se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

$= \frac{4x+1}{x^2+6x+9}$

$= \frac{4x+1}{(x+3)^2}$

Por tanto $\frac{x+2}{(x+3)(4x-1)} \times \frac{(4x+1)(4x-1)}{(x+3)(x+2)} = \frac{4x+1}{x^2+6x+9} = \frac{4x+1}{(x+3)^2}$.

c. $\frac{a^2+a}{a^2+a-6} \times \frac{a^2-2a-15}{a^2-1}$

$= \frac{a(a+1)}{(a+3)(a-2)} \times \frac{(a-5)(a+3)}{(a-1)(a+1)}$ Se factorizan los términos de cada fracción.

$= \frac{a}{(a-2)} \times \frac{(a-5)}{(a-1)}$ Se simplifican los factores comunes.

$= \frac{a(a-5)}{(a-2)(a-1)}$ Se multiplican las fracciones resultantes.

$= \frac{a^2-5a}{a^2-3a+2}$ Se realizan los productos.

Por tanto, $\frac{a^2+a}{a^2+a-6} \times \frac{a^2-2a-15}{a^2-1} = \frac{a^2-5a}{a^2-3a+2}$.

2. Realizar cada multiplicación.

a. $\dfrac{m^4 + m^2n^2 + n^4}{m^2 - 2n - mn + 2m} \times \dfrac{m^2n + mn - 2n}{m^6 - n^6} \times \dfrac{m^2 - 2mn + n^2}{m - 1}$

Primero, se factorizan numeradores y denominadores.

$$\frac{m^4 + m^2n^2 + n^4}{(m+2)(m-n)} \times \frac{n(m+2)(m-1)}{(m+n)(m-n)(m^4 + m^2n^2 + n^4)} \times \frac{(m-n)^2}{(m-1)}$$

Luego, se simplifican los factores comunes y se multiplica.

$$\frac{\cancel{m^4 + m^2n^2 + n^4}}{\cancel{(m+2)}\cancel{(m-n)}} \times \frac{n\cancel{(m+2)}\cancel{(m-1)}}{(m+n)\cancel{(m-n)}\cancel{(m^4 + m^2n^2 + n^4)}} \times \frac{\cancel{(m-n)}^2}{\cancel{(m-1)}} = \frac{n}{m+n}$$

Por tanto, el producto es $\dfrac{n}{m+n}$.

b. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} \times \dfrac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 - 8x} \times \dfrac{7x + 21}{7x^2 - 7}$

Primero, se factorizan numeradores y denominadores.

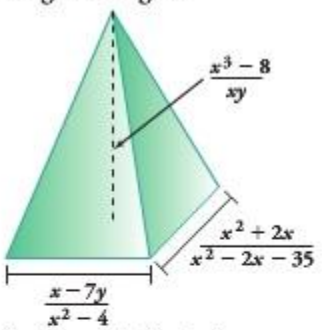
$$\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} \times \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x+4)(x-2)} \times \frac{7(x+3)}{7(x+1)(x-1)}$$

Luego, se simplifican los factores comunes y se multiplica.

$$\frac{\cancel{(x-3)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+3)}} \times \frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}(x+4)\cancel{(x-2)}} \times \frac{\cancel{7}\cancel{(x+3)}}{\cancel{7}\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x+4}$$

Por tanto, el producto es $\dfrac{1}{x+4}$.

3. Calcular el volumen de la siguiente figura.



Para encontrar el volumen de una pirámide de base rectangular se aplica la siguiente fórmula.

$V = \dfrac{1}{3}A_b \cdot h$, donde A_b es el área de la base y h es la altura.

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{xy - 7y}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x - 35}\right) \times \frac{x^3 - 8}{xy}$$

Primero, se factorizan los polinomios.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{y(x-7)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{x(x+2)}{(x-7)(x+5)} \times \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{xy}$$

Luego, se simplifican los factores comunes y se multiplica.

$$V = \frac{x^2 + 2x + 4}{3x + 15}$$

Finalmente, el volumen de la pirámide es $\dfrac{x^2 + 2x + 4}{3x + 15}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Observa cada grupo de fracciones algebraicas, donde una de ellas es el producto y las demás son los factores de una multiplicación. Luego, organiza cada multiplicación.

166. $\frac{9a^5y}{13x}, \frac{18a^2x^3}{y^2}, \frac{26x^4}{a^3y^3}$

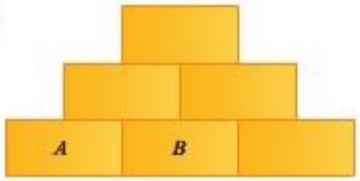
167. $\frac{4}{n}, \frac{32m^3}{5n^4}, 5mn, \frac{n^2}{8m^4}$

168. $\frac{2c^3}{15d^5}, \frac{5c^2}{7cn^2}, \frac{2c^4}{7dn^3}, \frac{3d^2}{n}$

169. $\frac{x^2-4}{x-3}, \frac{x+3}{x-5}, \frac{x^2-9}{x^2-4x+4}, \frac{x-2}{x^2-3x-10}$

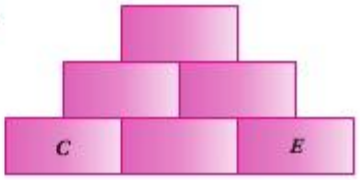
Completa cada pirámide de expresiones algebraicas racionales, colocando fracciones algebraicas en la base y ubicando el producto de dos de ellas consecutivas en la fila superior, en medio de las anteriores.

170.



$A = \frac{4m^2}{3n}$ $B = \frac{2n^3}{5m}$

171.



$C = \frac{x+4}{x^3+x^2-x-1}$ $E = \frac{4}{x+1}$

Realiza las siguientes multiplicaciones.

172. $\frac{3x^2y}{5xy} \cdot \frac{4xy^4}{6xy} \cdot \frac{90x^2yz}{8xz^3}$

173. $\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x+4}{x-2}$

174. $\frac{9xy^2}{4ab} \times \frac{7a^2}{18xy} \times \frac{3b}{42y} \times \frac{2y}{ab}$

175. $\frac{2x^2+x}{6x} \cdot \frac{8x^3}{4x+2} \cdot \frac{x-3}{12x}$

176. $\frac{2x-2y}{x^2-y^2} \cdot \frac{7x+7y}{42x-42y} \cdot \frac{x-y}{x}$

177. $\frac{3a^3+3ab^2}{3ax^2-3ax} \times \frac{x^3-x}{a^2x+b^2x} \times \frac{x}{x+1}$

178. $\frac{2ab+3b^2}{10b^2+6ab-25b-15a} \times \frac{2b^3-2a^2b-5b^2+5a^2}{2a^2b+5ab^2+3b^3}$

179. $\frac{x^2-9}{(x-3)^2} \times \frac{x^2-7x+12}{x^2+8x+16} \times \frac{x+4}{x^2+3x}$

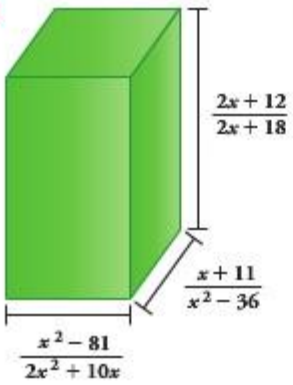
Busca el error, si existe, al hallar cada producto. Justifica tu respuesta.

180. $\frac{a^2-25b^2}{a-3b} \quad \frac{a^2-7ab+12b^2}{a-5b} = a^2-20b^2$

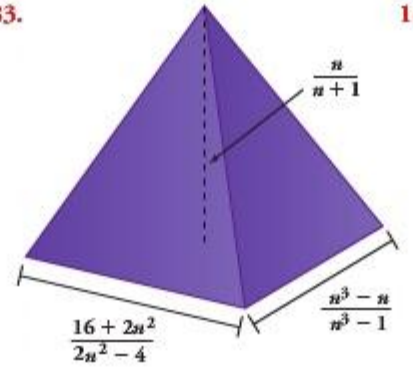
181. $\frac{2x}{x-2} \times \frac{x^2-4}{x^2+x} \times \frac{x^2-1}{x+2} = x-2$

Halla el volumen de cada figura.

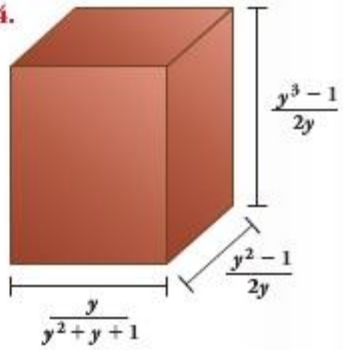
182.



183.



184.



3.3 División de fracciones algebraicas

Recurso imprimible

Para dividir dos fracciones algebraicas se multiplica la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda, teniendo en cuenta el mismo procedimiento utilizado para la multiplicación de fracciones algebraicas.

EJEMPLOS

1. Realizar las siguientes divisiones.

a. $\frac{4a^2}{5x^2} \div \frac{4mx}{6a}$

$= \frac{4a^2}{5x^2} \times \frac{6a}{4mx} = \frac{6a^3}{5mx^3}$ Se multiplica por el recíproco.

b. $\frac{15y^3}{19ax^3} \div \frac{20y^2}{38a^3x^4}$

$= \frac{15y^3}{19ax^3} \times \frac{38a^3x^4}{20y^2}$ Se multiplica $\frac{15y^3}{19ax^3}$ por el recíproco de $\frac{20y^2}{38a^3x^4}$.

$= \frac{(15y^3) \cdot (38a^3x^4)}{(19ax^3) \cdot (20y^2)}$ Se multiplican los numeradores y denominadores entre sí.

$= \frac{3a^2xy}{2}$ Se simplifica.

Por tanto, $\frac{15y^3}{19ax^3} \div \frac{20y^2}{38a^3x^4} = \frac{3a^2xy}{2}$.

c. $\frac{n^2 - 4nm + 4m^2}{n^2 - 4m^2} \div \frac{n^3 - 8m^3}{n + 2m}$

$= \frac{n^2 - 4nm + 4m^2}{n^2 - 4m^2} \times \frac{n + 2m}{n^3 - 8m^3}$ Se expresa la división como una multiplicación.

$= \frac{(n - 2m)^2}{(n + 2m)(n - 2m)} \times \frac{n + 2m}{(n - 2m)(n^2 + 2mn + 4m^2)}$ Se factoriza.

$= \frac{1}{n^2 + 2mn + 4m^2}$ Se simplifica.

Por tanto, $\frac{n^2 - 4nm + 4m^2}{n^2 - 4m^2} \div \frac{n^3 - 8m^3}{n + 2m} = \frac{1}{n^2 + 2mn + 4m^2}$.

d. $\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x + 4} \div \frac{2x^2 - 5x - 7}{x^2 + x - 12}$

$= \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x + 4} \times \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 5x - 7}$ Se expresa la división como una multiplicación.

$= \frac{(x + 3)(x + 1)(x - 1)}{(x + 4)} \times \frac{(x + 4)(x - 3)}{(x + 1)(2x - 7)}$ Se factoriza.

$= \frac{(x^2 - 9)(x - 1)}{2x - 7}$ Se simplifica.

Por tanto, $\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x + 4} \div \frac{2x^2 - 5x - 7}{x^2 + x - 12} = \frac{(x^2 - 9)(x - 1)}{2x - 7}$.

Recuerda que...

El recíproco de $\frac{c}{d}$ es $\frac{d}{c}$. Luego, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

2. Realizar la división entre las siguientes fracciones algebraicas.

a. $\dfrac{2x^2y}{6ab} \div \dfrac{5x}{9a^2} \div \dfrac{12ax^2}{10y}$

$\dfrac{2x^2y}{6ab} \div \dfrac{5x}{9a^2} \div \dfrac{12ax^2}{10y}$

$= \dfrac{2x^2y}{6ab} \times \dfrac{9a^2}{5x} \div \dfrac{12ax^2}{10y}$ Se expresa la primera división como una multiplicación.

$= \dfrac{2x^2y}{6ab} \times \dfrac{9a^2}{5x} \times \dfrac{10y}{12ax^2}$ Se expresa la segunda división como una multiplicación.

$= \dfrac{y^2}{2bx}$ Se simplifica.

Por tanto, $\dfrac{2x^2y}{6ab} \div \dfrac{5x}{9a^2} \div \dfrac{12ax^2}{10y} = \dfrac{y^2}{2bx}$.

b. $\dfrac{x+y}{y} \div \dfrac{x^2-y^2}{y^3} \div \dfrac{y^4}{2x^2+xy-3y^2}$

$\dfrac{x+y}{y} \div \dfrac{x^2-y^2}{y^3} \div \dfrac{y^4}{2x^2+xy-3y^2}$

$= \left(\dfrac{x+y}{y} \times \dfrac{y^3}{x^2-y^2}\right) \div \dfrac{y^4}{2x^2+xy-3y^2}$ Se expresa la primera división como una multiplicación.

$= \left(\dfrac{x+y}{y} \times \dfrac{y^3}{x^2-y^2}\right) \times \dfrac{2x^2+xy-3y^2}{y^4}$ Se expresa la segunda división como una multiplicación.

$= \dfrac{x+y}{y} \times \dfrac{y^3}{(x+y)(x-y)} \times \dfrac{(x-y)(2x+3y)}{y^4}$ Se factoriza.

$= \dfrac{2x+3y}{y^2}$ Se simplifica.

Por tanto,

$$\frac{x+y}{y} \div \frac{x^2-y^2}{y^3} \div \frac{y^4}{2x^2+xy-3y^2} = \frac{2x+3y}{y^2}.$$

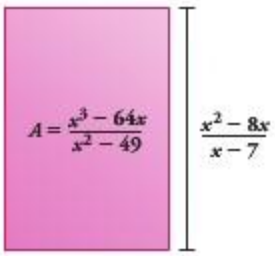


Figura 3.

3. Buscar una expresión algebraica para determinar la base del rectángulo que se muestra en la figura 3.

Para encontrar la base del rectángulo, se halla el cociente entre su área y su altura. Así, la expresión que determina la base es:

$\dfrac{x^3-64x}{x^2-49} \div \dfrac{x^2-8x}{x-7}$ Se plantea la división área ÷ altura.

$= \dfrac{x^3-64x}{x^2-49} \times \dfrac{x-7}{x^2-8x}$ Se expresa la división como una multiplicación.

$= \dfrac{x(x+8)(x-8)}{(x+7)(x-7)} \times \dfrac{x-7}{x(x-8)}$ Se factoriza.

$= \dfrac{x+8}{x+7}$ Se simplifica.

Por tanto, la expresión de la base del rectángulo es $\dfrac{x+8}{x+7}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Completa cada una de las divisiones entre fracciones algebraicas. Luego, simplifica.

185. $\frac{12x^2y^3}{18ab} \div \frac{6x^4y}{9a^2b^3} = \frac{12x^2y^3}{18ab} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

186. $\frac{2a-7}{3b^2} \div \frac{4a-14}{24b} = \frac{\square}{3b^2} \times \frac{24b}{\square} = \frac{\square}{\square}$

187. $\frac{20x^2y}{\square} \div \frac{30x^2}{\square} = \frac{\square}{34ab^4} \times \frac{17a^2b^3}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Relaciona cada división, con su respectivo cociente.

188. $\frac{35n^2}{18m^3} \div \frac{14nm^2}{9m^3}$

189. $\frac{24n^2m}{54nm^4} \div \frac{9m^3}{n^3}$

190. $\frac{n^3+n}{n^2-n} \div \frac{n^3-n^2}{n^2-2n+1}$

191. $\frac{m^2+8m+16}{m^2+2m-8} \div \frac{m^2-2m-3}{m^2-3m+2}$

192. $\frac{m^2+14m+48}{m^2+4m-21} \div \frac{m^2+4m-32}{m^2+3m-28}$

a. $\frac{m+6}{m-3}$

b. $\frac{m^2+3m-4}{m^2-2m-3}$

c. $\frac{4n^4}{81m^6}$

d. $\frac{5n}{4m^2}$

e. $\frac{n^2+1}{n^2}$

Determina si la afirmación es verdadera o si es falsa. Justifica tu respuesta.

193. El recíproco de la fracción $\frac{1-x}{x+1}$ es $-\frac{x+1}{x-1}$. ( )

194. El cociente de dos fracciones algebraicas nunca es un número entero. ( )

195. La división de tres fracciones algebraicas es siempre igual, sin importar el orden de las divisiones. ( )

196. **Si la suma de los números n y m es 36 y su producto es 9, ¿cuál es el valor numérico de la siguiente expresión?**

$\left(\frac{n^2-m^2}{m^2n^2}\right) \div \left(\frac{n-m}{mn}\right)$.

Realiza las siguientes divisiones entre fracciones algebraicas.

197. $\frac{2a^3+7a^2-4a}{a^2-16} \div \frac{2a^2-15a+7}{a^3-11a^2+28} \div \frac{a+4}{a-4}$

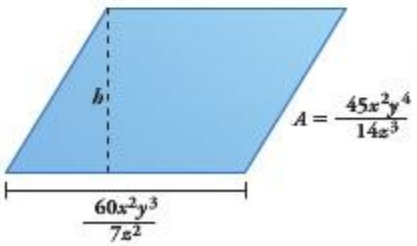
198. $\frac{16n^2-24mn+9m^2}{16n-12m} \div \frac{64n^3-27m^3}{32n^2+24nm+18m^2}$

199. $\frac{y^3+2y^2-3y}{4y^2+8y+3} \div \frac{y^2-y}{2y^2+3y}$

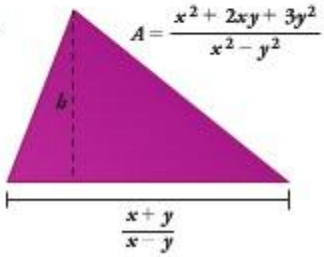
200. $\frac{2x^2+7x-15}{x^3+4x^2} \div \frac{x^2-3x-40}{x^2-4x-32}$

Determina la altura en cada una de las siguientes figuras.

201.



202.



3.4 Operaciones combinadas de fracciones algebraicas

Recurso imprimible · Actividad

Para resolver expresiones en las cuales se presentan sumas, restas, multiplicaciones y divisiones entre fracciones algebraicas, se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Si la expresión no tiene signos de agrupación, primero se resuelven las multiplicaciones y divisiones indicadas en su orden respectivo.

  Luego, se resuelven las sumas y restas correspondientes.
- Si la expresión tiene signos de agrupación, se efectúan primero las operaciones que se encuentran entre los paréntesis.

  Luego, se realizan las operaciones combinadas de suma y resta con multiplicación y división, teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones.

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes operaciones.

a. $\frac{3x^2y^4}{7z^6} \times \frac{21z}{6x^5y} + \frac{10xy^2z^3}{14x^2} \div \frac{5x^3z^6}{7y}$

$= \frac{3x^2y^4}{7z^6} \times \frac{21z}{6x^5y} + \frac{10xy^2z^3}{14x^2} \times \frac{7y}{5x^3z^6}$ Se expresa la división como una multiplicación.

$= \frac{(3x^2y^4) \times (21z)}{(7z^6) \times (6x^5y)} + \frac{(10xy^2z^3) \times (7y)}{(14x^2) \times (5x^3z^6)}$ Se multiplican las fracciones.

$= \frac{3y^3}{2x^3z^5} + \frac{y^3}{x^4z^3}$ Se simplifican las fracciones.

$= \frac{3xy^3 + 2y^3z^2}{2x^4z^5}$ Se suman las fracciones.

Por tanto, $\frac{3x^2y^4}{7z^6} \times \frac{21z}{6x^5y} + \frac{10xy^2z^3}{14x^2} \div \frac{5x^3z^6}{7y} = \frac{3xy^3 + 2y^3z^2}{2x^4z^5}$.

b. $\left(\frac{x+y}{y}\right)\left(\frac{y}{x^2-y^2} - \frac{y}{x^2+xy}\right)$

$= \left(\frac{x+y}{y}\right)\left(\frac{y}{(x+y)(x-y)} - \frac{y}{x(x+y)}\right)$ Se resuelve la resta del paréntesis.

$= \left(\frac{x+y}{x}\right)\left(\frac{y \cdot x}{(x+y)(x-y) \cdot x} - \frac{y(x-y)}{(x)(x+y)(x-y)}\right)$ Se amplifican las fracciones.

$= \left(\frac{x+y}{y}\right)\left(\frac{xy - y(x-y)}{x(x+y)(x-y)}\right)$ Se realiza la resta.

$= \left(\frac{x+y}{y}\right)\left(\frac{y^2}{x(x+y)(x-y)}\right)$ Se realizan las operaciones.

$= \frac{x+y}{y} \times \frac{y^2}{x(x+y)(x-y)}$ Se multiplica.

$= \frac{y}{x(x-y)}$ Se simplifica.

Por tanto, $\left(\frac{x+y}{y}\right)\left(\frac{y}{x^2-y^2} - \frac{y}{x^2+xy}\right) = \frac{y}{x(x-y)}$.

2. Resolver la siguiente expresión.

$$\frac{6a^2-11ab+4b^2}{3b^2-ab} \div \frac{2a^2+ab-b^2}{3a+4b} \times \frac{a^2-2ab-3b^2}{a+3b}$$

Primero, se resuelven las operaciones de izquierda a derecha, expresando la división como una multiplicación.

$$\frac{6a^2-11ab+4b^2}{3b^2-ab} \times \frac{3a+4b}{2a^2+ab-b^2} \times \frac{a^2-2ab-3b^2}{a+3b}$$

Segundo, se factorizan los numeradores y denominadores de cada fracción.

$$= \frac{(2a-b)(3a-4b)}{-b(a-3b)} \times \frac{3a+4b}{(2a-b)(a+b)} \times \frac{(a+b)(a-3b)}{a+3b}$$

Luego, se simplifican los factores comunes.

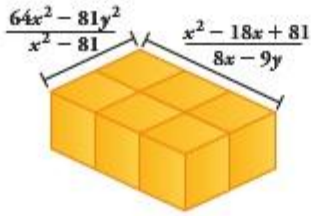
$$= \frac{3a-4b}{-b} \times \frac{3a+4b}{1} \times \frac{1}{a+3b}$$

Por último, se multiplican los numeradores y denominadores entre sí.

$$= -\frac{9a^2-16b^2}{b(a+3b)}$$

Por tanto, $\frac{6a^2-11ab+4b^2}{3b^2-ab} \div \frac{2a^2+ab-b^2}{3a+4b} \times \frac{a^2-2ab-3b^2}{a+3b} = -\frac{9a^2-16b^2}{b(a+3b)}$.

3. Determinar la expresión algebraica relacionada a la altura del bloque que se muestra en la figura, si el volumen está dado por $\frac{8x^2+9xy}{x^2+18x+81}$.



La expresión que representa la altura del bloque es:

$$\frac{8x^2+9xy}{x^2+18x+81} \div \left(\frac{64x^2-81y^2}{x^2-81} \times \frac{x^2-18x+81}{8x-9y}\right).$$

Primero, se multiplican las fracciones y se simplifica.

$$= \frac{8x^2+9xy}{x^2+18x+81} \div \left(\frac{(8x+9y)(8x-9y)}{(x+9)(x-9)} \times \frac{(x-9)^2}{8x-9y}\right)$$

$$= \frac{8x^2+9xy}{x^2+18x+81} \div \frac{(8x+9y)(x-9)}{x+9}$$

Luego, se divide y se simplifica.

$$= \frac{x(8x+9y)}{(x+9)^2} \times \frac{(x+9)}{(8x+9y)(x-9)} = \frac{x}{x^2-81}$$

Por tanto, la altura del bloque es $\frac{x}{x^2-81}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Ejercito · Soluciono problemas

Responde. Explica con un ejemplo.

203. ¿Cómo resolver operaciones combinadas que no involucran signos de agrupación?

204. ¿Por qué es necesario usar signos de agrupación en operaciones combinadas de fracciones algebraicas?

Introduce los signos de agrupación, de tal forma que la igualdad sea verdadera. Justifica tu respuesta.

205. $x - 2 - \frac{4}{x+1} \cdot x + \frac{4x}{3} = \frac{7x^3 - 7x^2 - 42x}{3x+3}$

206. $\frac{a^2+3a}{1-a^2} \div \frac{1-a}{a+1} + \frac{a}{a-1} = \frac{a^2+3a}{1-3a}$

207. $\frac{1}{a+4} + \frac{1}{a-4} \times \frac{a}{4} - \frac{4}{a} = \frac{1}{2}$

Realiza las siguientes operaciones. Luego simplifica si es posible.

208. $\left(\frac{3ab}{5c^6} \times \frac{6b}{4a^2c}\right) \div \frac{4a^6}{b^3}$

209. $\frac{4x}{x+1} \div \frac{3x^4}{x^2-1} \times \frac{x^2+2x}{8x}$

210. $\left(\frac{n+1}{n-1} \times \frac{3n-3}{2n+2}\right) \div \frac{n^2+n}{n^2-m-2}$

211. $\frac{x^2-x-6}{4x+8} \times \left(\frac{5}{x^2-5x+6} \div \frac{3}{x^2-4x+4}\right)$

212. $\frac{n+m}{n^2+2mn+m^2} + \frac{n+m}{n-m} \times \frac{n-m}{n+m}$

213. $\left(a - 6 - \frac{10}{a+3}\right) \div \left(a + 2 - \frac{2}{a+3}\right)$

Relaciona cada operación con su respectivo resultado.

214. $\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-6} \cdot \left(\frac{x}{x-3} - \frac{6}{x^2-2x-3}\right)$

215. $\frac{x^2-1}{5x^2+7x-6} \div \left(\frac{x}{5x-3} - \frac{1}{x+2}\right)$

216. $\left(\frac{x}{x+4} + \frac{6x+6}{x^2+3x-4}\right) \cdot \frac{x^2+3x-4}{x^2+4x+3}$

217. $\frac{2x^2-3x-2}{2x-x^2+3} \cdot \left(\frac{x}{2x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x+4}{2x^2-3x-2}\right)$

a. $\frac{x^2-1}{x^2-3x+3}$

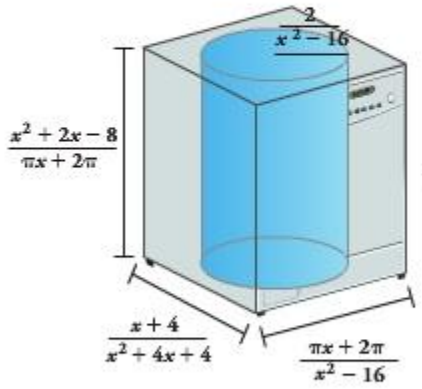
b. 1

c. -1

d. $\frac{x+2}{x+1}$

Lee, observa y resuelve.

Una lavadora con tanque cilíndrico tiene las dimensiones que aparecen en la figura.



Radio del cilindro $\frac{2}{x^2-16}$

218. Halla el volumen del tanque cilíndrico y de la lavadora.

219. Determina la diferencia entre los dos volúmenes.

3.5 Fracciones complejas

Recursos imprimibles · Ampliación multimedia · Actividad

Las fracciones algebraicas cuyos numerador y denominador son a su vez fracciones, reciben el nombre de fracciones complejas. Algunos ejemplos de fracciones complejas son:

$$\frac{a-\frac{1}{a}}{b+\frac{1}{b}} \quad \text{y} \quad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1+\frac{2}{x}}{x}}{\frac{x}{x+1}-1}$$

Recuerda que...

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Donde a y d se llaman extremos y b y c medios.

Para resolver una fracción compleja se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

- **Primero,** se realizan las operaciones que aparecen en el numerador y el denominador.
- **Luego,** se resuelve la división entre las fracciones algebraicas que resultan en el numerador y en el denominador.
- **Por último,** se simplifica la fracción algebraica resultante, si es posible.

EJEMPLOS

1. Simplificar las siguientes fracciones complejas.

a. $\dfrac{\frac{a+3}{a+1}}{a}$

$= \dfrac{a+3}{1} \div \dfrac{a+1}{a}$ Se plantea la división.

$= \dfrac{a+3}{1} \times \dfrac{a}{a+1}$ Se multiplica el numerador por el inverso de la fracción.

$= \dfrac{a(a+3)}{a+1} = \dfrac{a^2+3a}{a+1}$ Se halla el producto.

b. $\dfrac{\frac{x+3}{x+4}-\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-3}{x+4}}$

$= \dfrac{\frac{(x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)}-\frac{(x+1)(x+4)}{(x+2)(x+4)}}{\frac{(x-1)(x+4)}{(x+2)(x+4)}-\frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x+4)}}$ Se realizan las restas del numerador y del denominador de la fracción compleja.

$= \dfrac{\frac{x^2+5x+6-(x^2+5x+4)}{(x+2)(x+4)}}{\frac{x^2+3x-4-(x^2-x-6)}{(x+2)(x+4)}}$ Se determina el denominador común.

$= \dfrac{\frac{2}{(x+2)(x+4)}}{\frac{4x+2}{(x+2)(x+4)}}$ Se resuelven las operaciones indicadas.

$= \dfrac{2(x+2)(x+4)}{(4x+2)(x+2)(x+4)} = \dfrac{2}{4x+2} = \dfrac{1}{2x+1}$ Se halla el producto de los extremos y el producto de los medios y se simplifica.

Por tanto, $\dfrac{\frac{x+3}{x+4}-\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-3}{x+4}} = \dfrac{1}{2x+1}$.

2. Resolver las siguientes operaciones.

a. $\dfrac{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}{1-\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{x}}}$

$= \dfrac{1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}{1-\dfrac{2}{\dfrac{x-1}{x}}}$ Se realizan las operaciones en el numerador y en el denominador de la fracción compleja.

$= \dfrac{1+\dfrac{x}{x+1}}{1-\dfrac{2x}{x-1}}$ Se multiplican los extremos y se multiplican los medios.

$= \dfrac{\dfrac{x+1+x}{x+1}}{\dfrac{x-1-2x}{x-1}}$ Se realizan la suma en el numerador y en el denominador de la fracción compleja.

$= \dfrac{\dfrac{2x+1}{x+1}}{\dfrac{-x-1}{x-1}}$ Se resuelven las operaciones.

$= \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(-x-1)(x+1)}$ Se realizan la multiplicación de extremos y la multiplicación de medios.

$= -\dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)^2}$ Se cambia de signo.

Por tanto, $\dfrac{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}{1-\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{x}}} = -\dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)^2}$.

b. $\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}$

$= \dfrac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x}}$ Se realizan la resta en el numerador y la suma en el denominador de la fracción compleja.

$= \dfrac{x(x^2-1)}{x^2(x+1)}$ Se realizan la multiplicación de los extremos y la multiplicación de los medios.

$= \dfrac{x(x+1)(x-1)}{x^2(x+1)}$ Se factoriza el numerador.

$= \dfrac{x-1}{x}$ Se simplifica.

Por tanto, $\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x-1}{x}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

220. ¿Qué es una fracción compleja, existen fracciones complejas de números naturales?

221. ¿Qué es simplificar una fracción compleja y cuál es el procedimiento para su simplificación?

Simplifica cada una de las siguientes fracciones complejas.

222. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{y^3}{x^2y^4}}$

223. $\dfrac{\dfrac{17a^4b}{3cd^3}}{\dfrac{51a^2b}{2cd^4}}$

224. $\dfrac{1+\dfrac{1}{a-1}}{1+\dfrac{1}{a^2-1}}$

225. $\dfrac{\dfrac{x^2-16}{x-4}}{\dfrac{x+4}{x-4}}$

226. $\dfrac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}}$

227. $\dfrac{\dfrac{x}{2}+x}{x-\dfrac{x}{4}}$

228. $\dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}+3}{6-\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}$

229. $\dfrac{\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{x+3}{x-3}}{\dfrac{9}{x^2-9}+\dfrac{x^2}{x^2-9}}$

230. $\dfrac{\dfrac{m+2n}{m-n}+\dfrac{n}{m}}{\dfrac{m+n}{m}+\dfrac{3n}{m-n}}$

Marca con ✓ las fracciones algebraicas que tienen como resultado -1.

231. ☐ $\dfrac{y-\dfrac{y}{y-\dfrac{y^2}{y+1}}}{\dfrac{y}{y}}$

232. ☐ $\dfrac{5-\dfrac{3}{4-\dfrac{1}{m}}}{5-\dfrac{3}{4-\dfrac{1}{m-2}}}$

233. ☐ $\dfrac{\dfrac{1}{a+b+c}-\dfrac{1}{a-b+c}}{\dfrac{1}{a-b+c}-\dfrac{1}{a+b+c}}$

Escribe en el espacio ☐ el signo de la operación $(+, -, \times, \div)$ para que la igualdad sea verdadera. Justifica tu respuesta.

234. $\left[x+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}\right] \square \left[1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x-\dfrac{x}{1-x}}}\right] = -\dfrac{2x^2-2x}{x^2-x+1}$

Realiza las operaciones indicadas en las siguientes fracciones complejas.

235. $\dfrac{\dfrac{a^2-1}{a^2+1}-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}}{\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{a+1}{a-1}} \div \left(\dfrac{a+\dfrac{1}{a}}{a^2}-1\right)$

236. $\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} \times \dfrac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\dfrac{2x+2}{x^2+x-2} \div \dfrac{x+1}{x^3-4x^2-7x+10}} \cdot \left(\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}}\right)$

Lee y resuelve.

La velocidad media en cualquier intervalo de tiempo es el promedio de la velocidad final y la velocidad inicial, así:

$$v_{\text{media}} = \frac{v_f + v_0}{2}.$$

Determina si las siguientes fracciones complejas son equivalentes a la velocidad media.

237. $\dfrac{2}{\dfrac{1}{v_f}+\dfrac{1}{v_0}}$

238. $\dfrac{\dfrac{1}{v_f}+\dfrac{1}{v_0}}{\dfrac{2}{v_f \cdot v_0}}$

239. $\dfrac{\dfrac{1}{v_f \cdot v_0}}{\dfrac{1}{v_f}+\dfrac{1}{v_0}}$

EJERCICIOS PARA REPASAR

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Determina el mcd de los siguientes monomios y polinomios.

240. $32x^6y^4z^2$; $64x^4y^2z^4$; $88x^5y^5z^3$

241. $75a^3b^4c^6$; $225a^5b^3c^5$; $150a^6b^2c^4$

242. $33x^2 + 3x - 6$; $3x^2 - 12x + 9$

243. $2x^4 + 4x^3 + 2x^2$; $4x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 4x$

Determina el mcm de los siguientes monomios y polinomios.

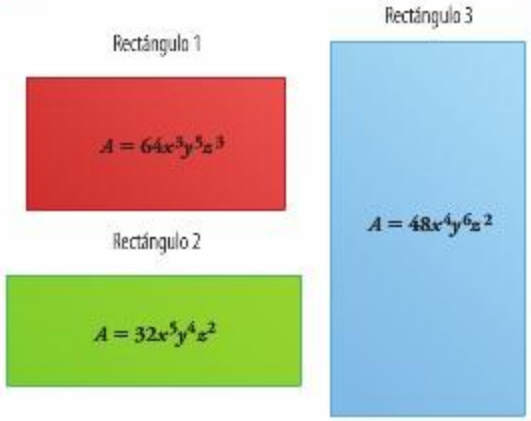
244. $20x^4y^6$; $24x^6y^2$; $30x^2y^4$

245. $a^4 - 4a^2 - 32$; $a^4b + 2a^3b + 4a^2b$

246. $4b^2x^2 + 4a^2b^3$; $2a^2x - 2a^2x^2$; $(1 - a)^2$

Los siguientes rectángulos coinciden en la medida de uno de sus lados. Esta medida es el mcd de sus áreas.

247. Halla las medidas de los lados de cada rectángulo.



Rectángulo 1: _____

Rectángulo 2: _____

Rectángulo 3: _____

248. ¿Cuántos factores primos tiene el mcm de $-ab^3$; $a^3 - a^2b + b^3$ y $a^4 + a^3b + a^2b^2$?

_____

Expresiones algebraicas racionales

Simplifica las siguientes expresiones racionales.

249. $\dfrac{18x^2y^3}{6x^5y}$

250. $\dfrac{ab}{ab + b^2}$

251. $\dfrac{ax - ay + bx - by}{x^2 - y^2}$

252. $\dfrac{20x^2yz - 60x^2yz}{9x^2y^2z - 27x^2y^2z}$

253. $\dfrac{x^3 + 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$

254. $\dfrac{3 + 2a - 8a^2}{4 + 5a - 6a^2}$

Comprueba en cada caso si las fracciones son equivalentes.

255. $\dfrac{x + 2}{3x + 6}$ y $\dfrac{1}{3}$

256. $\dfrac{3a - 3}{9a^2 - 9}$ y $\dfrac{1}{3a - 3}$

257. $\dfrac{y^2 + y}{y^2}$ y $\dfrac{y + 1}{y}$

Operaciones entre fracciones algebraicas

Resuelve las siguientes operaciones.

258. $\dfrac{m - 2}{2m} + \dfrac{3m - 1}{3m} - \dfrac{m + 1}{4m}$

259. $\dfrac{x}{3x + 9} + \dfrac{x - 2}{3x - 9} - \dfrac{2x^2}{3x^2 - 27}$

Escribe el término que hace verdadera la igualdad. Comprueba la respuesta.

260. $\frac{2}{x+3} + \square - \frac{4x-7}{x^2-x-6} = \frac{1}{x+3}$

261. $\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} + \square = \frac{4a}{a+b}$

262. $\square \cdot \left(\frac{1}{x} \div \frac{1}{x-1}\right) = \frac{2(x-1)}{x^2}$

Realiza las operaciones indicadas. Luego, simplifica.

263. $\frac{9x^2y}{3x} - \frac{5x^2y}{3x} + \frac{4x^2y^2}{3x^2} \div \frac{5y}{2x}$

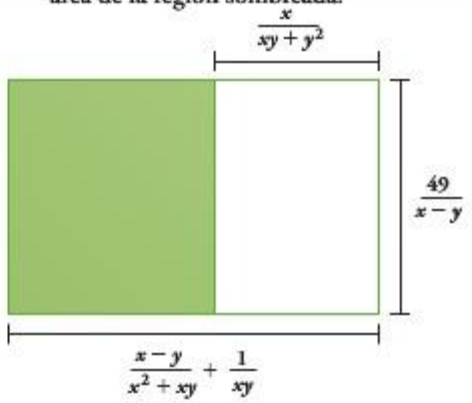
264. $\frac{x+5}{3y} - \frac{5x+30}{9y^2} \cdot \frac{3y}{x+4}$

265. $\frac{x^4-1}{x^4-81} \cdot \frac{x^2-1}{x+1} \div \frac{x^2+1}{x^2+9}$

266. $\frac{a^2}{a-1} \cdot \left(\frac{a^3}{a+1} + \frac{a-1}{a^6-2a^3+1}\right)$

267. $\left(\frac{x^2-x-12}{x^2-2x-8} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}\right) \div \frac{x-7}{x+6}$

268. Determina una expresión que represente el área de la región sombreada.



Simplifica las siguientes expresiones.

269. $\dfrac{x - \frac{2}{x+3}}{x + \frac{2x-3}{x+3}}$

270. $\dfrac{1 + \frac{1}{a-1}}{\frac{a}{a+1} - \frac{a^2}{a^2-1}}$

Lee y averigua la operación que resolvió cada estudiante.

Ana, Erica y Fabio resolvieron operaciones con fracciones algebraicas. Cada uno eligió una operación y encontró un resultado diferente, pero todos correctos.

Los resultados de cada estudiante fueron:

Ana	Erica	Fabio
$\frac{9a^2}{b^2}$	$\frac{1}{3(a-3)}$	$\frac{3a^2b+3b^3}{4a-12}$

271. $\frac{a+3}{6b} \div \frac{a^2-9}{2b}$

272. $\frac{3a^2+3ab}{b} \div \frac{ab+b^2}{3a}$

273. $\frac{a^2+b^2}{a-3} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{3b}{a}$

PROBLEMAS PARA REPASAR

Dos máquinas construyen dispositivos electrónicos para celulares, las máquinas funcionan con igual rendimiento, una empieza la fabricación con 10 días de anticipación.

¿Qué parte de la cantidad de dispositivos llevan las máquinas después de veinte días de trabajo?

¿Cuánto más de avance tiene la primera máquina respecto a la segunda en veinte días de trabajo?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Qué parte de la cantidad de dispositivos llevan las máquinas después de veinte días de trabajo?

¿Cuánto más de avance tiene la primera máquina respecto a la segunda en veinte días de trabajo?

¿Cuáles son los datos del problema?

Dos máquinas construyen dispositivos electrónicos para celulares, las máquinas funcionan con igual rendimiento, una empieza la fabricación con 10 días de anticipación.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se identifican las variables involucradas en la situación.

x: cantidad de dispositivos que se deben construir.

d: cantidad de dispositivos que se pueden fabricar diariamente.

Segundo, la expresión relacionada con la cantidad de dispositivos diarios elaborados por la primera máquina es igual a $\frac{d}{x}$.

Luego, al cabo de 20 días la primera máquina ha construido $\frac{20d}{x}$ de la cantidad total.

Ahora, la expresión relacionada con la cantidad de dispositivos diarios elaborados por la segunda máquina es igual a $\frac{d}{x}$.

Luego, después de 10 días, es decir, al cabo de 20 días la segunda máquina ha construido $\frac{10d}{x}$ de la cantidad total.

De modo que ambas máquinas han elaborado:

$\frac{20d}{x} + \frac{10d}{x} = \frac{30d}{x}$ Se plantea y resuelve la suma de las expresiones de las dos máquinas al cabo de 20 días.

La parte que llevan las máquinas al cabo de 20 días es $\frac{30d}{x}$.

Para hallar la diferencia de las partes que llevan las máquinas al cabo de 20 días se sigue:

$\frac{20d}{x} - \frac{10d}{x} = \frac{10d}{x}$ Se plantea y resuelve la resta de las expresiones de las dos máquinas al cabo de 20 días.

La diferencia de las partes que llevan las máquinas al cabo de veinte días es $\frac{10d}{x}$.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones son correctas. Luego, se tiene que la parte que llevan las máquinas al cabo de 20 días es $\frac{30d}{x}$ y la diferencia de las partes al cabo de veinte días es $\frac{10d}{x}$.

Resuelve la pregunta 274 con la siguiente información.

Dos grupos ambientalistas ofrecen excursiones al Parque Metropolitano para observar la diversidad de flora y fauna que caracteriza esa región. En los siguientes recuadros se muestra la frecuencia con que estos grupos realizan las excursiones:

Grupo 1	Grupo 2
Excursiones cada $x^2 + x$ días	Excursiones cada $x^3 + x$ días

274. Si el día a los dos grupos realizaron la excursión, ¿cuál expresión algebraica representa la cantidad de días que deben pasar, como mínimo, para que ambos grupos realicen la excursión de nuevo el mismo día?

_____

Resuelve la pregunta 275 con la siguiente información.

Claudia va al gimnasio cada $x^2 - 4$ días, a la piscina cada $2(x - 2)$ días, y al cine, cada $(x - 2)^2$ días.

275. Si hoy asistió a esos tres lugares, ¿cuál expresión algebraica representa la cantidad de días que deben pasar, como mínimo, para que Claudia vuelva a ir a los tres sitios el mismo día?

_____

Resuelve las preguntas 276 a 278 con la siguiente información.

Se requiere terminar la construcción de un edificio, y solamente falta pintar su interior, para lo cual se contrata a dos grupos con igual cantidad de trabajadores, todos de igual eficiencia y con la misma cantidad de horas de trabajo diario. El segundo grupo comenzará a trabajar algunos días después que el primero.

Responde, teniendo en cuenta que N es la cantidad de metros cuadrados que se deben pintar al interior del edificio, h la cantidad de hombres que conforman cada grupo y n la cantidad de metros cuadrados que puede pintar cada uno de los trabajadores del primer grupo al día.

276. Si al comienzo solamente trabaja el primer grupo, ¿qué fracción del trabajo total logran hacer diariamente cada uno de ellos y en conjunto?

277. Si el segundo grupo debe pintar la superficie, menos 1.000 metros cuadrados que le corresponden a la primera, ¿qué parte del trabajo realiza a partir de este momento?

278. ¿Qué parte del trabajo diario realizan ambos grupos a partir del momento que ingresa el segundo de ellos a trabajar?

Realiza las actividades 279 y 280 con base en la siguiente información.

Se considera un rectángulo dividido en cuatro partes como se muestra en la figura. Si se conoce el área de tres de estas partes, determina el área rosada del rectángulo en función de las áreas conocidas.



279. Determina si el área de la región rosada está dada por la expresión:

$$\text{Área} = \frac{A \cdot C}{B}$$

280. Si un terreno rectangular se divide en cuatro partes, de manera que tres de sus partes se representan mediante las siguientes expresiones, determina el área del rectángulo restante.

$$A = \frac{2x^2 + 2x}{2x^2} \qquad B = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x}$$

$$C = \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para conocer la resistencia de la sangre.

La hemodinámica es la parte de la biofísica que estudia el flujo de la sangre y los mecanismos en el sistema circulatorio y vascular, teniendo como base los principios físicos de la dinámica de fluidos. El sistema cardiovascular está compuesto principalmente por el corazón, la sangre y los vasos sanguíneos.



El corazón es el órgano encargado de bombear la sangre a todas las células del cuerpo, si este órgano presenta problemas, entonces puede causar un mal funcionamiento en los demás órganos. Por tal razón es importante medir la resistencia que tiene la sangre. Si esta tiene una gran resistencia, el corazón trabaja más fuerte y se genera un desgaste innecesario; mientras que si la resistencia es baja, produce un menor esfuerzo en el corazón.

Existen varias técnicas para analizar el funcionamiento del corazón, una de ellas es denominada cateterismo cardíaco, la cual consiste en introducir una pequeña sonda por la arteria femoral que va directamente al corazón para medir diferentes variables como el flujo sanguíneo, longitud del conducto y el bombeo que realiza el corazón.

Es posible determinar una expresión para medir la resistencia de la sangre, a partir de datos obtenidos en este tipo de exámenes. La expresión fue propuesta en 1848 por el médico fisiólogo francés Jean Poiseuille cuando realizaba experimentos de mecánica de fluidos sobre el caudal de un fluido laminar aplicado al sistema circulatorio, ya que es un circuito cerrado y continuo por donde fluye la sangre.

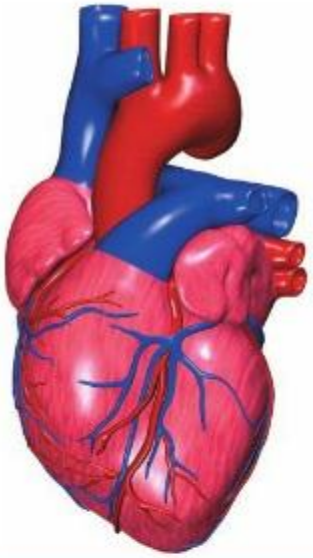
La expresión es $R = C\frac{L}{r^4}$, donde:

R: es la resistencia de la sangre.

C: es una constante positiva que depende de la viscosidad de la sangre.

L: es la longitud del vaso sanguíneo por donde circula la sangre.

r: es el radio del vaso sanguíneo.



1. **¿Por qué crees que es importante encontrar la resistencia de la sangre en el cuerpo humano?**
2. **Si $C = 1$, busca y simplifica la expresión para la resistencia de la sangre cuando L y r son respectivamente:**
   a. $x^2 - 4; x + 2$
   b. $x^2 - 10x + 21; x - 7$
   c. $2x^2 - 6x - 20; x - 5$
   d. $4x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 4x; x + 1$
3. **Si la constante de viscosidad es igual en ambos casos, encuentra la expresión para la diferencia de la resistencia de la sangre cuando pasa por una arteria carótida de diámetro 4 cm y longitud 5 cm y la vena cava de 2,8 cm de diámetro y longitud de 9 cm.**
4. **Consulta sobre las aplicaciones de la expresión propuesta por Poiseuille. Luego, explica a tus compañeros las aplicaciones encontradas.**

Trabaja con Microsoft Mathematics

Objetivo: realizar operaciones y simplificar fracciones algebraicas complejas.

Descripción: realizar la adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones algebraicas. Además, aplicar la factorización en la simplificación de fracciones algebraicas con el programa Microsoft Mathematics.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en: www.microsoft.com/download/en/search. aspx?q=Math

1. Haz clic en Microsoft Mathemathics.
2. Observa la ventana que se despliega. Luego, selecciona la opción **Números reales**, como se muestra en la ilustración.



3. Escribe fracciones algebraicas con la herramienta $\frac{c}{d}$, que aparece en la calculadora, como se muestra en la figura.



4. Escribe, en la hoja de cálculo, la fracción compleja: $\dfrac{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}{1-\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{x}}}$. Luego, haz clic en **Entrar**, como se muestra en la figura.



5. Observa el resultado en la hoja de cálculo.



6. Simplifica la siguiente fracción compleja.

$$\frac{a-2b-\dfrac{4b^2}{a+b}}{a-3b-\dfrac{5b^2}{a+b}}$$



7. Utiliza Microsoft Mathemathics para simplificar las siguientes fracciones algebraicas complejas:

a. $\dfrac{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x}}}{2+\dfrac{3}{2-\dfrac{1}{x}}}$ **b.** $\dfrac{\dfrac{2}{x}+2}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

8. Halla el valor numérico de cada fracción compleja para $x=-1$ y $y=2$.



7 Ecuaciones e inecuaciones

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- **Reconocer la incógnita en una ecuación y despejarla** correctamente.
- **Plantear y resolver una ecuación** a partir de un problema y resolverlo.
- **Resolver inecuaciones y representar gráficamente las soluciones.**

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño

5	Multimedia	**1**	Audio
1	Galería	**7**	Imprimibles
5	Actividades	**1**	Enlace web

Lo que sabes...

1. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones si $a = -2$ y $b = 3$.

a. $7ab$

b. $3a^2 - 5ab$

c. $b(a + b) - a$

d. $(2a - b)(2a + b)$

2. Resuelve las siguientes operaciones.

a. $(2x - 5) + (3x + 7)$

b. $(m + n)^2$

c. $(3a - 2b + 8) - (a - b + 4)$

3. Factoriza.

a. $y^2 - 2y + 1$

b. $ax^2 - 3a^2x$

c. $x^2 - 4x - 5$

d. $am^2 + 3am + 2a$

4. Escribe $>$ o $<$ según corresponda.

a. $101 \square 111$

b. $7^2 \square 5^3$

c. $-120 \square 75$

d. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \square x^2, a \in \mathbb{N}, a \neq 0$



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

... Para evaluar el rendimiento de un deportista en la halterofilia.

La halterofilia es el nombre que se le da al levantamiento de pesas. El deporte consiste en levantar una barra que está ligada a discos dispuestos en cada uno de sus extremos. El número de discos determina el peso final que levanta el deportista.

:: Lee más acerca de este tema en la página 218.

Cronología de las ecuaciones e inecuaciones

Egipto. En el papiro de Rhind se consignan problemas que se deben solucionar con ecuaciones.

1650 a. C.

China. En la obra anónima *La matemática en nueve libros* se aplican las ecuaciones para resolver problemas de agricultura.

300 a. C.

Inglaterra. Thomas Harriot introduce por primera vez los símbolos de desigualdades conocidos actualmente como mayor que (>) y menor que (<).

1590 d. C.

Gales. Robert Recorde introduce por primera vez el símbolo (=).

1557 d. C.

1758 d. C.

Francia. El economista François Quesnay establece el primer modelo lineal para representar ciertas relaciones económicas.

Francia. Joseph Fourier hace aportes a la programación lineal mediante la solución de sistemas de ecuaciones.

1826 d. C.



Europa. Se introducen modelos de equilibrio en la teoría de utilidad marginal aplicada, utilizando ecuaciones lineales.

1930 d. C.

1. Ecuaciones

Recurso imprimible

Ampliación multimedia

Historia de las matemáticas

Los egipcios y las ecuaciones



Los antiguos egipcios llamaban a las incógnitas *aha* (montón).

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma $x + ax = b$ y $x + ax + bx = 0$, donde a, b y c eran los números conocidos y x la incógnita.

Por ejemplo, en el papiro Rhind aparece la siguiente ecuación: "*un montón y un séptimo del mismo es igual a 24*".

Una **igualdad** es una expresión que compara dos cantidades mediante el signo igual (=).

- Si la igualdad compara números con sus operaciones se denomina **igualdad numérica**.
- Si la igualdad incluye expresiones algebraicas se denomina **igualdad algebraica**.

Por ejemplo, $18 \div 6 = 3$ es una igualdad numérica y $3m + 4 = 10$ es una igualdad algebraica.

Las igualdades algebraicas se clasifican en identidades y en ecuaciones.

Una **identidad** es una igualdad que incluye variables y se cumple para cualquier valor de dichas variables.

Una **ecuación** es una igualdad que incluye variables y se cumple solo para valores específicos de las variables.

Por ejemplo, la igualdad $3x + x = 4x$ es una identidad porque se cumple para cualquier valor de x.

En cambio, la igualdad $10 + 2x = 16$ es una ecuación porque solo se cumple para $x = 3$.

1.1 Elementos de una ecuación

Los elementos de una ecuación son:

- **Miembros:** son las expresiones que hay a cada lado de la igualdad. A la expresión que se encuentra al lado izquierdo de la igualdad se le llama **primer miembro** y a la expresión que se encuentra al lado derecho se le llama **segundo miembro**.
- **Incógnita:** es el valor desconocido o variable.
- **Términos:** son los sumandos que se presentan en cada miembro de la ecuación. A los términos que no tienen variables se les denomina **términos independientes**.
- **Grado:** es el mayor exponente de la variable o las variables que tiene la ecuación.

Por ejemplo, en la ecuación $10 + 2x = 16$ el primer miembro es $10 + 2x$ y el segundo miembro es 16.

EJEMPLO

Identificar los elementos de las ecuaciones $3x + 5 = 8$ y $9a^2 + 3 = 4 - a$.

En la siguiente tabla se muestran los elementos de cada ecuación.

Ecuación	$3x + 5 = 8$	$9a^2 + 3 = 4 - a$
Primer miembro	$3x + 5$	$9a^2 + 3$
Segundo miembro	8	$4 - a$
Incógnita	x	a
Términos independientes	5 y 8	3 y 4
Grado	1	2

1.2 Solución de una ecuación

Actividad

La **solución de una ecuación es** el valor o conjunto de valores que puede tomar la variable para que la igualdad se cumpla. Para hallar la solución de una ecuación, se transforma la ecuación original en otras ecuaciones equivalentes, hasta lograr que la incógnita sea uno de los miembros de la ecuación resultante y el otro miembro sea el valor que representa. Para esto se aplica la propiedad uniforme de la igualdad.

La **propiedad uniforme de la igualdad** establece que si a los miembros de una igualdad se les suma, resta, multiplica o divide entre un mismo número, la igualdad se conserva. Es decir, si $a = b$ entonces se cumple que:

$a + c = b + c$ $\qquad$ $a \cdot c = b \cdot c$

$a - c = b - c$ $\qquad$ $a \div c = b \div c$, con $c \neq 0$

Solución de ecuaciones de la forma $x \pm a = b$

Para resolver ecuaciones de la forma $x \pm a = b$ se aplica la propiedad uniforme de la igualdad. Así, para despejar la incógnita x se suma o se resta a en ambos lados. Por ejemplo, para resolver la ecuación $x - a = b$ se realizan los siguientes pasos:

$x - a = b$ Ecuación.

$x - a + a = b + a$ Se suma a en ambos miembros de la ecuación.

$x + 0 = b + a$ Se reducen los términos semejantes.

$x = b + a$ Se aplica la propiedad modulativa.

Por tanto, la solución de una ecuación de la forma $x - a = b$ es $x = b + a$.

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $x - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}$.

Se realizan los siguientes pasos:

$x - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}$ Ecuación.

$x - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = -\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ Se suma $\frac{2}{5}$.

$x + 0 = \frac{3}{20}$ Se efectúan las operaciones.

$x = \frac{3}{20}$ Se aplica la propiedad modulativa.

Se verifica que $x = \frac{3}{20}$ es solución. Para ello, se remplaza este valor en la ecuación y se realizan las operaciones.

$\frac{3}{20} - \frac{2}{5}$ Se remplaza x por $\frac{3}{20}$.

$= \frac{3 - 8}{20}$ Se realiza la resta de fracciones.

$= -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$ Se simplifica la fracción.

Por tanto, la solución de la ecuación $x - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}$ es $\frac{3}{20}$ ya que al comprobar se obtiene una igualdad.

2. Hallar la masa m que mantiene en equilibrio la balanza.



Para que la balanza se mantenga en equilibrio las masas deben ser iguales. Luego se tiene que:

$m + 1\frac{1}{5} = 7$ Se plantea la ecuación.

$m + \frac{6}{5} = 7$ Se convierte el número mixto a fracción.

$m = 7 - \frac{6}{5}$ Se resta $\frac{6}{5}$.

$m = \frac{29}{5} = 5{,}8$ Se realiza la división.

Por tanto, la masa m que mantiene en equilibrio la balanza es de 5,8 kg.

Solución de una ecuación de la forma $ax = b$

Para resolver ecuaciones de la forma $ax = b$, se aplica la propiedad uniforme de la igualdad, es decir, se dividen los dos miembros de la igualdad entre el coeficiente de la incógnita x, así:

$ax = b$ Ecuación.

$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ Se dividen ambos miembros entre a.

$x = \frac{b}{a}$ Se simplifica.

Por tanto, la solución de una ecuación de la forma $ax = b$ es $x = \frac{b}{a}$.

EJEMPLOS

1. Resolver ecuación $\frac{7}{5}x = -\frac{1}{6}$.

La ecuación es de la forma $ax = b$. Por esto, para resolverla se realizan los siguientes pasos:

$\frac{7}{5}x = -\frac{1}{6}$ Ecuación.

$\frac{\frac{7}{5}x}{\frac{7}{5}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{7}{5}}$ Se dividen ambos miembros de la ecuación entre $\frac{7}{5}$.

$x = -\frac{5}{42}$ Se realiza la división entre fracciones.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = -\frac{5}{42}$.

Luego, se verifica la solución remplazando $x = -\frac{5}{42}$ en la ecuación inicial.

$\frac{7}{5} \cdot \left(\frac{-5}{42}\right) = \frac{-35}{210} = \frac{-7}{42} = -\frac{1}{6}$ Se obtiene una igualdad.

2. Determinar las posibles medidas de la base (b) y de la altura (h) de un triángulo cuya área es 30 cm², si $b > h$ y $b, h \in \mathbb{Z}^+$.

Sea x el producto de la medida de la base (b) por la medida de la altura (h), entonces se realizan los siguientes pasos:

$\frac{1}{2}bh = A$ Se aplica la expresión para calcular el área de un triángulo.

$\frac{1}{2}x = 30$ Se remplazan $x = bh$ en el área del triángulo.

$\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{2}}$ Se dividen ambos miembros de la ecuación entre $\frac{1}{2}$.

$x = 60$ Se efectúa la división entre fracciones.

Como $x = bh$ y $x = 60$, entonces $bh = 60$. Así, los posibles valores de b y de h son aquellos enteros positivos cuyo producto es 60. Estos valores se pueden determinar hallando los divisores de 60.

$D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

Por tanto, como $b > h$ los posibles valores de b son 10, 12, 15, 20, 30, 60 y los posibles valores de h son 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Recuerda que...

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones, entonces se cumple que:

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$

Afianzo COMPETENCIAS

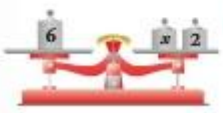
Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

1. Completa la tabla.

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnita
$x + 5 = 8$			
$5a = 0$			
$6 = c - 4$			
$12y - 3 = 5y$			

Representa con una ecuación cada balanza en equilibrio.

2.



3.



4.



5.



Resuelve las ecuaciones de la forma $x \pm a = b$.

6. $x - 13 = 20$

7. $m + 50 = -45$

8. $10 = p - 62$

9. $r - 6 = \frac{1}{8}$

10. $\frac{25}{4} + n = -\frac{7}{4}$

11. $3 - l = 2$

12. $a + \sqrt{9} = \sqrt{16}$

13. $\sqrt{841} = m - 5$

14. $\frac{1}{3} + b = \frac{4}{3}$

15. $c - \frac{1}{2} = 3$

Soluciona las ecuaciones de la forma $ax = b$.

16. $3x = 5$

17. $-2m = 16$

18. $-p = 12$

19. $\frac{1}{3}x = 27$

20. $-\frac{2}{5}n = 20$

21. $\frac{3}{9}x = -\frac{1}{10}$

22. $\sqrt{2}\,a = \sqrt{8}$

23. $-5b = 1$

24. $12 = \sqrt{441}\,n$

25. $\frac{y}{5} = \sqrt[3]{125}$

26. $-\frac{p}{4} = \sqrt{256}$

27. $-\frac{1}{4}n = \sqrt{4}$

28. Escribe una ecuación de la forma $x \pm a = b$, cuyos términos independientes sean fracciones. Luego, resuélvela y comprueba la solución.

Determina si cada proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

29. Si $x = -4$, entonces x es solución de la ecuación $2x - 5 = 10$.

30. Si a la ecuación $b + 5 = 2b - 3$ se suma b en ambos miembros de la ecuación, entonces su solución no cambia.

31. Si $m = -\frac{1}{5}$, entonces m no es solución de la ecuación $15m = -5$.

32. Si ambos miembros de la ecuación $3x = 9$ se multiplican por el inverso multiplicativo de 3, entonces se obtiene que la solución es 3.

Comprueba en cada caso si los valores de x y de y son soluciones de la ecuación.

33. $3x + 2y = 7$ $\quad x = 1, y = 2$

34. $-6x - y = 2$ $\quad x = -1, y = 4$

35. $-\frac{1}{3}x = y$ $\quad x = 27, y = 9$

36. $-101x = 2y$ $\quad x = 2, y = 100$

37. $-4x = 7y$ $\quad x = 7, y = -7$

Lee y resuelve.

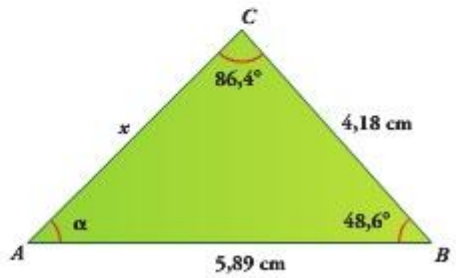
38. La tercera parte de un número más su triple es igual a 20. ¿Cuál es el número?

39. El largo de un rectángulo es el doble de su ancho. Si su perímetro es de 60 cm, determina sus dimensiones.

40. Encuentra la medida del lado de un rombo si su perímetro es 1.254 cm.

41. Halla la edad de María y la de Luisa, si su suma es igual a 68 y la edad de María es tres veces la de Luisa.

42. Calcula la medida de α en el siguiente triángulo.



Solución de ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$

Ampliación multimedia

Para resolver ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$, también se aplica la propiedad uniforme de la igualdad.

Para hallar la solución de este tipo de ecuaciones hay que considerar dos casos: cuando la ecuación es $ax + b = c$ y cuando es $ax - b = c$.

Matemáticamente

Halla la solución general de una ecuación de la forma $ax - b = c$.

La ecuación $ax + b = c$ se resuelve mediante los siguientes pasos:

$ax + b = c$	Ecuación.
$ax + b - b = c - b$	Se resta b en ambos miembros de la ecuación.
$ax = c - b$	Se reducen términos semejantes.
$\frac{ax}{a} = \frac{c - b}{a}$	Se dividen entre a ambos miembros de la ecuación.
$x = \frac{c - b}{a}$	Se simplifica.

Por tanto, la solución de la ecuación $ax + b = c$ es $x = \frac{c - b}{a}$.

EJEMPLOS

1. Resolver ecuación $\sqrt{2}x - 2 = \sqrt{6}$.

Se realizan los siguientes pasos:

$\sqrt{2}x - 2 = \sqrt{6}$	Ecuación.
$\sqrt{2}x - 2 + 2 = \sqrt{6} + 2$	Se suma 2 en ambos miembros de la ecuación.
$\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{2}}$	Se dividen ambos miembros de la ecuación entre $\sqrt{2}$.
$x = \frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{2}}$	Se simplifica.
$x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$	Se racionaliza y se simplifica.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Recuerda que...

Para racionalizar una expresión de la forma $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ con $a, b > 0$ se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{a}$ así:

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$

2. El triple de un número aumentado en 12 es igual a 6. ¿Cuál es el número?

Primero, se representa el enunciado con una ecuación, así:

$3x$	Se representa el triple del número.
$3x + 12$	Se suma 12.
$3x + 12 = 6$	Se iguala a 6.

Luego, se resuelve la ecuación.

$3x + 12 = 6$	
$3x + 12 - 12 = 6 - 12$	Se resta 12 en ambos miembros de la ecuación.
$3x = -6$	Se resta.
$\frac{3x}{3} = -\frac{6}{3}$	Se divide entre 3.
$x = -2$	Se simplifica.

Finalmente, se tiene que el número es -2.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

43. Completa el procedimiento que se utilizó para resolver la ecuación.

$$3x - 9 = 12$$
$$3x - 9 + \square = 12 + \square$$
$$3x + \square = \square$$
$$\frac{3x}{\square} = \frac{\square}{\square}$$
$$x = \square$$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

44. $5x - 7 = 2$

45. $-6m - 18 = -12$

46. $-3p + 4 = 7$

47. $\frac{1}{5}n - 6 = 9$

48. $\sqrt{2}l + \sqrt{2} = \sqrt{8}$

49. $3x - 1 = 6$

50. $12y + 100 = 24$

51. $-88 = 6a - 22$

52. $-\frac{1}{5} = 65p + 13$

53. $8{,}5n - 2{,}6 = 0{,}7$

Relaciona cada ecuación con su ecuación equivalente (sus soluciones son las mismas).

54. $M - 15 = 25$

55. $5M = 25$

56. $7M + 5 = 20$

57. $5M + 8 = 17$

a. $14M + 10 = 40$

b. $5M - 17 = -8$

c. $\frac{M}{25} = \frac{1}{5}$

d. $15 - M = -25$

58. Encuentra el error en el siguiente procedimiento. Luego, corrígelo y halla la solución correcta.

$$6x + 60 = 120$$
$$6x + 60 - 60 = 120 + 60$$
$$6x = 180$$
$$\frac{6x}{6} = \frac{180}{6}$$
$$x = 30$$

Escribe dos ecuaciones que cumplan cada condición dada.

59. Su solución es igual a 5.

60. Es de la forma $ax + b = c$ y su solución es $x = 12$.

61. Es de la forma $ax - b = c$ y su solución es $x = -\frac{1}{3}$.

Comprueba si el valor de la incógnita es solución de la ecuación. Si no lo es, halla la solución correcta.

62. $3x - 7 = 5$ $\quad x = 4$

63. $-6y + 2 = 4$ $\quad y = -\frac{2}{3}$

64. $-8 - 16p = -4$ $\quad p = \frac{1}{4}$

65. $\frac{1}{2}n - 10 = \frac{2}{5}$ $\quad n = \frac{104}{5}$

66. $\frac{7}{5}m - 4 = \frac{1}{8}$ $\quad m = -\frac{32}{5}$

Escribe la ecuación que representa cada enunciado. Luego, resuélvela.

67. El doble de un número aumentado en 20 es igual a -6.

68. El triple de un número disminuido en 100 es igual a 54.

69. La tercera parte de un número menos 9 es igual a 81.

70. La sexta parte de un número más 8 es igual a 60.

Lee y resuelve.

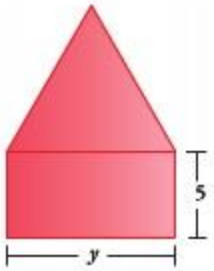
71. La suma de tres números impares consecutivos es 243. ¿Cuál es el número mayor?

72. La suma de tres números pares consecutivos es 90. ¿Cuál es el cuadrado del número menor?

73. Escribe la masa que debe ir en la segunda balanza, si ambas están en equilibrio.



74. Determina el valor de y si el perímetro del rectángulo es igual al perímetro del triángulo equilátero.



1.3 Transposición de términos

Ampliación multimedia

Recurso imprimible

La **transposición de términos** consiste en pasar un término de un miembro de la ecuación al otro, sin que la ecuación cambie.

Por ejemplo, en la ecuación $3a - 5 = 2$, si se transponen términos, la ecuación queda como $3a = 2 + 5$, es decir, se pasa el -5 al otro miembro de la ecuación pero con signo opuesto.

Este procedimiento es lo mismo que sumar 5 en ambos miembros de la ecuación, la única diferencia es que simplifica el proceso de resolución.

Solución de una ecuación de la forma $ax \pm b = cx \pm d$

Para resolver una ecuación de la forma $ax \pm b = cx \pm d$ se realizan los siguientes pasos:

Primero, se transponen términos dejando en un solo miembro los que tienen la incógnita y en el otro miembro, los términos independientes.

Luego, se reducen términos semejantes en ambos miembros de la ecuación.

Finalmente, se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación entre su coeficiente.

Historia de las matemáticas



Brahmagupta y las ecuaciones

Brahmagupta (598-668) fue un matemático hindú que estableció que la solución general de una ecuación de la forma $ax + b = cx + d$ es:

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Brahmagupta, además halló soluciones generales de ecuaciones de segundo grado.

Recurso imprimible

EJEMPLOS

1. Indicar los términos que se deben transponer para resolver la siguiente ecuación.

$$\frac{1}{5}x + 4 = 6 - 2x$$

Los términos que se deben transponer son $-2x$ y 4.

2. Resolver la ecuación $4x + 8 = 26 - 5x$. Luego, comprobar la solución.

Se realizan los siguientes pasos:

$4x + 8 = 26 - 5x$	Ecuación.
$4x + 5x = 26 - 8$	Se transponen términos.
$9x = 18$	Se reducen términos semejantes.
$\frac{9x}{9} = \frac{18}{9}$	Se dividen entre 9 ambos miembros de la ecuación.
$x = 2$	Se simplifica.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = 2$.

Para comprobar la solución se remplaza 2 en la ecuación original y se resuelven las operaciones así:

$4(2) + 8 = 26 - 5(2)$	Se remplaza $x = 2$.
$8 + 8 = 26 - 10$	Se multiplica.
$16 = 16$	Se suma y se resta.

Como el resultado en ambos miembros de la igualdad es 16, entonces $x = 2$ sí es solución de la ecuación.

En este caso se aplicó la transposición de términos para resolver la ecuación. Por esta razón, es importante revisar los signos de los términos que se transponen para que la ecuación no cambie y la solución sea correcta.

3. La mitad de un número aumentado en 14 es igual al triple del número disminuido en 10. ¿Cuál es el número?

Primero, se representa el enunciado con una ecuación. Así, si y es el número desconocido, entonces la ecuación es:

$$\frac{y}{2} + 14 = 3y - 10$$

Luego, se resuelve la ecuación así:

$\frac{y}{2} + 14 = 3y - 10$ Ecuación.

$\frac{y}{2} - 3y = -10 - 14$ Se transponen términos.

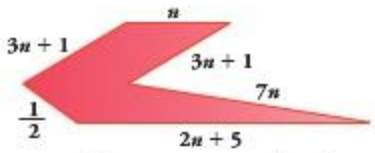
$-\frac{5y}{2} = -24$ Se reducen términos semejantes.

$-5y = -48$ Se multiplica por 2.

$y = \frac{48}{5} = 9{,}6$ Se divide entre -5 y se simplifica.

Finalmente, se tiene que el número es 9,6.

4. Calcular el valor de n en la figura si su perímetro es equivalente a $30n + 2$.



Primero, se determina una expresión que represente el perímetro p de la figura. Para esto, se suman las expresiones que representan las medidas de los lados.

$$p = 3n + 1 + \frac{1}{2} + 2n + 5 + 7n + 3n + 1 + n$$

$$p = 16n + \frac{15}{2}$$

Luego, como el el perímetro p es equivalente a $30n + 2$, se plantea la ecuación y se resuelve así:

$16n + \frac{15}{2} = 30n + 2$ Se plantea la ecuación.

$16n - 30n = 2 - \frac{15}{2}$ Se transponen términos.

$-14n = -\frac{11}{2}$ Se reducen términos semejantes.

$\frac{-14n}{-14} = \frac{-\frac{11}{2}}{-14}$ Se dividen ambos miembros de la ecuación entre -14.

$n = \frac{11}{28}$ Se efectúa divisiones entre fracciones.

Finalmente, se tiene que el valor de n en la figura es $\frac{11}{28}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde.

75. ¿Cuál es el procedimiento para resolver una ecuación de la forma $ax \pm b = cx \pm d$?

76. ¿En qué consiste la transposición de términos de una ecuación?

Completa el espacio en cada ecuación de forma tal que la solución sugerida sea la correcta.

77. $5x = 4x +$ _____. Solución $x = 7$

78. $-3x = x +$ _____. Solución $x = -2$

79. $2x = -x +$ _____. Solución $x = 2$

80. $x +$ _____ $= 2x - 1$. Solución $x = 5$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

81. $3x + 5 = -x + 1$

82. $9x - 1 = 6x + 11$

83. $\frac{2}{3}x + 4 = \frac{1}{2}x + 6$

84. $-4x + 5 = 2x + 2$

85. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{1}{4}x$

86. $\frac{2}{3}x - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

87. $0{,}7x + 1 = 0{,}3x + 0{,}56$

88. $0{,}5x - 7 = 3x - 12$

Responde.

89. ¿Cuál es la solución de una ecuación de la forma $ax \pm b = cx \pm b$?

90. ¿Es posible resolver la ecuación si tiene la forma $ax \pm b = ax \pm d$?

Desarrolla las siguientes ecuaciones no lineales, utilizando el método expuesto en esta sección.

91. $5p^2 - 17 = 3p^2 + 1$

92. $5x^2 - 1 = 4x^2 + 3$

93. $6x^2 - 5 = 13x^2 - 5$

94. $4m^3 = m^3 - 3$

95. $2y^3 - 5 = y^3 + 22$

96. $4n^3 - 7 = 5 - 8n^3$

Combina la reducción de términos semejantes con transposición de términos, para resolver las siguientes ecuaciones.

97. $2x - 3 + 5x - 9 = 4x - 8 + 2x$

98. $8x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x + 35$

99. $\frac{2}{5}x - \frac{3}{4} + \frac{7}{10}x = \frac{1}{2} + \frac{3}{5}x - \frac{1}{8}$

Encuentra en cada caso una ecuación con las condiciones pedidas.

100. Con solución $x = -2$ y coeficientes enteros.

101. Coeficientes fraccionarios y soluciones enteras.

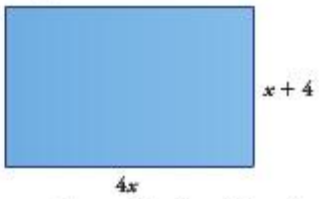
102. Encuentra los errores que se cometieron al resolver la ecuación. Corrígelos y encuentra la solución correcta de la ecuación.

$$9x - 5 + 7x = 6x + 7$$
$$16x - 5 = 6x + 7$$
$$16x - 6x = 7 - 5$$
$$10x = 2$$
$$x = \frac{2}{10}$$
$$x = \frac{1}{5}$$

Resuelve los siguientes problemas.

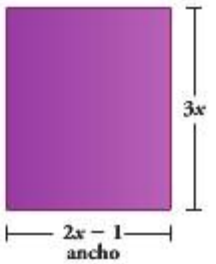
103. La suma de dos enteros consecutivos es 137. ¿Cuáles son los números?

104. El perímetro del rectángulo de la figura es 48 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones?



105. En un número de dos dígitos la cifra de las unidades es el doble de la cifra de las decenas. Si al sumarle 27 las cifras cambian de posición, ¿cuál es el número?

106. Si al ancho del rectángulo se le agregan 3 unidades y al largo se le restan 3, la figura se convierte en un cuadrado. ¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo?



1.4 Ecuaciones con signos de agrupación

Enlace web

Para resolver ecuaciones con signos de agrupación se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se eliminan los signos de agrupación. Para esto, se debe tener en cuenta que si el signo menos $(-)$ precede un paréntesis, entonces cambia el signo de los términos que están en su interior. Además, para eliminar los signos de agrupación, también se aplica la propiedad distributiva, es decir, si a, b, c son expresiones algebraicas, entonces $a(b \pm c) = ab \pm ac$.
- **Luego,** se aplican los procedimientos para solucionar ecuaciones estudiadas anteriormente.
- **Finalmente,** se despeja la incógnita y, si es necesario, se comprueba la solución.

> ***Recuerda que...***
> Los signos de agrupación son:
> Llaves: { }
> Corchetes: [ ]
> Paréntesis: ( )

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $6 - (4m + 5) = 3(m + 2)$.

Se realizan los siguientes pasos:

$6 - (4m + 5) = 3(m + 2)$	Ecuación.
$6 - 4m - 5 = 3(m + 2)$	Se elimina el paréntesis precedido por el signo menos.
$6 - 4m - 5 = 3m + 6$	Se aplica la propiedad distributiva.
$-4m - 3m = 6 - 6 + 5$	Se transponen términos.
$-7m = 5$	Se reducen términos semejantes.
$m = -\frac{5}{7}$	Se divide entre -7.

Por tanto, la solución de la ecuación es $m = -\frac{5}{7}$.

2. El producto de un número natural por su sucesor, menos el producto del número por su antecesor, es igual a 48. ¿Cuál es el número?

Primero, se plantea la ecuación. Si n es el número natural, entonces $n + 1$ es su sucesor y $n - 1$ es su antecesor. Así, la ecuación resultante es $n(n + 1) - n(n - 1) = 48$.

Luego, se realizan los siguientes pasos para resolver la ecuación.

$n(n + 1) - n(n - 1) = 48$	Ecuación.
$n^2 + n - n^2 + n = 48$	Se aplica la propiedad distributiva.
$2n = 48$	Se reducen los términos semejantes.
$\frac{2n}{2} = \frac{48}{2}$	Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 2.
$n = 24$	Se simplifica.

Finalmente, el número natural es 24. Para comprobar la solución se remplaza $n = 24$ en la ecuación original y se resuelven las operaciones.

$24(24 + 1) - 24(24 - 1) = 48$	Se remplaza n.
$24(25) - 24(23) = 48$	Se suma y se resta.
$600 - 552 = 48$	Se multiplica.
$48 = 48$	

Como $48 = 48$, entonces $n = 24$ es solución de la ecuación.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas · Razono

Responde.

107. ¿Cuáles son los signos de agrupación?

108. ¿Cuál es el polinomio que resulta al eliminar los signos de agrupación en la expresión $-\{-[-(2x^2y - 3xy^2 - 4)]\}$?

109. ¿Cómo se resuelve una ecuación con signos de agrupación?

110. **Resuelve cada ecuación y escribe, frente al resultado, la letra correspondiente a cada una. Luego, descubre la palabra oculta.**

U	$2x + 5 = 2 + 4x + 3$	-8
C	$3(x - 4) + 4 = 2(x - 1)$	6
A	$4(x - 1) = 3(x + 2)$	0
I	$3 - 2(x - 1) = 1 - x$	10
N	$3(x - 6) = 2(x + 4)$	$-2{,}5$
E	$2(x - 4) + 5 = x + 11$	4
O	$5(x - 7) + 9 = 3(x + 2) + 4$	18
C	$4(1 - x) = -2(4x + 3)$	26
E	$3(x - 1) + 20 = -7$	14
S	$4 - 3(x + 2) = x + 2$	-1

111. **Explica por qué a pesar de que la solución de la siguiente ecuación es verdadera, el procedimiento que se utiliza para resolverla es incorrecto.**

$$4x - [3x - (7x + 8)] = 2$$
$$4x - [3x - 7x + 8] = 2$$
$$4x - [-4x + 8] = 2$$
$$4x + 4x + 8 = 2$$
$$8x + 8 = 2$$
$$8x = 2 - 8$$
$$8x = -6$$
$$x = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

112. **Ubica los paréntesis en la siguiente ecuación para que la solución sea $x = -16$.**

$$- - 3x + 8 = 2x + 4$$

Verifica la solución de cada ecuación. Si es errónea, halla la solución correcta.

113. $3x + 7 = 5(x + 1)$ $\quad x = 1$

114. $-\frac{1}{4}(y + 2) = \frac{y - 3}{8}$ $\quad y = -\frac{1}{4}$

115. $\frac{a - 3}{5} = \frac{a - 5}{2}$ $\quad a = \frac{19}{3}$

116. $5(b - 3) = 4(b + 1)$ $\quad b = -10$

117. $3(c + 8) = c + 2$ $\quad c = 1$

118. $\frac{4}{3}(x + 2) = x - 1$ $\quad x = \frac{3}{4}$

119. $\frac{m - 1}{3} = \frac{4m + 2}{3}$ $\quad m = -1$

Determina los valores de s en la siguiente ecuación $s(st + 3) = s(s + 2t) + 2$, con incógnita t de tal forma que:

120. La ecuación tenga infinitas soluciones.

121. La ecuación no tenga solución.

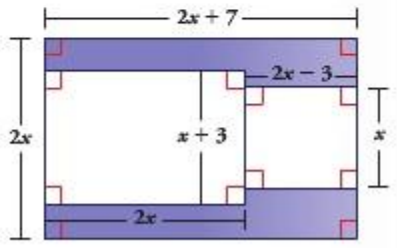
Resuelve.

122. El triple de la suma de un número más 17, es igual al doble de la diferencia entre el doble del mismo número y 5. ¿Cuál es el número?

123. Tres múltiplos consecutivos de 4 suman 492. Halla los tres números.

124. Sea a un número diferente de 1. Determina el número x que aumentado $a - 2$ unidades es igual al producto de a por la diferencia entre el número y dos.

125. El área de la región sombreada en la siguiente figura es 55 cm². Calcula el ancho y el largo del rectángulo de mayor área.



1.5 Ecuaciones con coeficientes racionales

Recurso imprimible · Actividad

Para resolver ecuaciones con coeficientes racionales se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se halla el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores.
- **Luego,** se multiplica cada miembro de la ecuación por el mcm y se simplifica.
- **Finalmente,** se resuelve la ecuación sin denominadores aplicando la transposición de términos.

EJEMPLO

En una colección de problemas que datan del siglo V al VI quedó registrada la edad del matemático griego Diofanto de la siguiente manera:

Su infancia duró $\frac{1}{6}$ de su vida y se casó después de $\frac{1}{7}$ más. Su barba creció después de $\frac{1}{12}$ más y su hijo nació 5 años después. El hijo vivió la mitad de los años del padre y el padre murió 4 años después del hijo. ¿Cuántos años vivió Diofanto?

Se tiene que x es la edad de Diofanto.

$\frac{1}{6}x$ duración de la infancia de Diofanto.

$\frac{1}{7}x$ el tiempo que duró para casarse después de su infancia.

$\frac{1}{12}x$ duración de crecimiento de la barba después de que se casó.

$\frac{1}{2}x$ tiempo que vivió el hijo.

Primero, se plantea la ecuación. Si x es la edad de Diofanto, entonces la suma de las partes de su vida es igual a x. Por tanto, la ecuación es:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{7} + \frac{x}{12} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Segundo, se halla el mcm de los denominadores.

6	7	12	2	2	
3	7	6	1	2	
3	7	3	1	3	
1	7	1	1	7	mcm $(6, 7, 12, 2) = 2^2 \times 3 \times 7$
1	1	1	1		mcm $(6, 7, 12, 2) = 84$

Luego, se realizan los siguientes pasos para resolver la ecuación:

$84\left(\frac{x}{6}\right) + 84\left(\frac{x}{7}\right) + 84\left(\frac{x}{12}\right) + (84)(5) + 84\left(\frac{x}{2}\right) + (84)(4) = 84x$ Se multiplica por el mcm.

$14x + 12x + 7x + 420 + 42x + 336 = 84x$ Se simplifica.

$14x + 12x + 7x + 42x - 84x = -420 - 336$ Se transponen términos.

$-9x = -756$ Se reducen términos semejantes.

$\frac{-9x}{-9} = \frac{-756}{-9}$ Se divide entre 9.

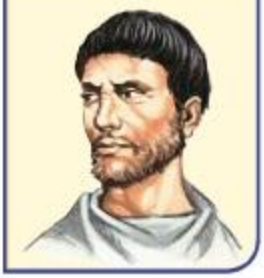
$x = 84$

Finalmente, se obtiene que Diofanto vivió 84 años.

Historia de las matemáticas

El álgebra sincopada

En la obra *La Aritmética*, Diofanto (s. III d. C.) introdujo abreviaturas para las incógnitas y las operaciones aritméticas, creando así lo que hoy se conoce como álgebra sincopada. De esta forma representaba las ecuaciones, aunque sus soluciones las realizaba aplicando el lenguaje natural.



1.6 Ecuaciones con coeficientes literales

Recurso imprimible

Algunas ecuaciones tienen coeficientes que son letras.

Por ejemplo, en la ecuación $ax + 5 = cx - m$, si la única incógnita es x, entonces a, c y m son coeficientes literales.

Para resolver ecuaciones con coeficientes literales se aplican los mismos procedimientos que cuando los coeficientes son numéricos.

La única diferencia es que la solución se expresa en términos de los coeficientes literales.

Historia de las matemáticas

François Viète y los coeficientes literales



François Viète (1540-1603), matemático francés, fue el primero en representar los coeficientes de una ecuación con letras. Viète utilizó vocales para representar incógnitas y consonantes para representar los coeficientes.

Recurso imprimible

EJEMPLOS

Resolver las siguientes ecuaciones para la incógnita indicada.

a. $xm + 5z = xp - 8$ **para** x.

Se realizan los siguientes pasos:

$xm + 5z = xp - 8$	Ecuación.
$xm - xp = -8 - 5z$	Se transponen términos.
$x(m - p) = -8 - 5z$	Se factoriza.
$x = \frac{8 + 5z}{p - m}$	Se divide entre $m - p$ con $(m - p \neq 0)$ y se simplifica.

Por tanto, la solución de la ecuación es:

$$x = \frac{8 + 5z}{p - m}$$

b. $\frac{ay + b}{5} - \frac{y - 2}{6} = \frac{2(b - 3y)}{3}$ **para** y.

Primero, se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores. Así, se tiene que mcm $(5, 6, 3) = 30$.

Luego, se realizan los siguientes pasos:

$30\left(\frac{ay + b}{5}\right) - 30\left(\frac{y - 2}{6}\right) = 30\left[\frac{2(b - 3y)}{3}\right]$	Se multiplica por el mcm.
$6(ay + b) - 5(y - 2) = 10[2(b - 3y)]$	Se simplifica.
$6(ay + b) - 5(y - 2) = 10(2b - 6y)$	Se aplica la propiedad distributiva.
$6ay + 6b - 5y + 10 = 20b - 60y$	Se aplica la propiedad distributiva.
$6ay - 5y + 60y = 20b - 6b - 10$	Se transponen términos.
$6ay + 55y = 14b - 10$	Se reducen términos semejantes.
$y(6a + 55) = 14b - 10$	Se factoriza la incógnita.
$\frac{y(6a + 55)}{(6a + 55)} = \frac{14b - 10}{6a + 55}$	Se divide entre $6a + 55$.
$y = \frac{14b - 10}{6a + 55}$	Se simplifica.

Finalmente, la solución de la ecuación es:

$$y = \frac{14b - 10}{6a + 55}$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde las siguientes preguntas.

126. Al multiplicar una ecuación con coeficientes racionales por el mcm de sus denominadores, ¿qué es lo que se consigue?

127. La solución de una ecuación con coeficientes racionales, ¿necesariamente es un número racional?

128. ¿Cuál es la diferencia entre una ecuación con coeficientes numéricos y una con coeficientes literales?

Resuelve y verifica la solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

129. $\frac{x-4}{3}+5=0$

130. $-x+\frac{1}{3}=5+\frac{x}{6}$

131. $-\frac{x+2}{12}=\frac{5x}{2}-x$

132. $\frac{x-3}{8}-\frac{3+5x}{9}=\frac{2x+1}{6}$

133. $3-\frac{15+3x}{14}=\frac{2x-5}{7}$

134. $\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}-\frac{x+1}{4}=1$

135. $\frac{x}{3}+\frac{x+2}{4}=3+\frac{x+3}{9}$

Escribe una ecuación con coeficientes fraccionarios, cuya solución sea la que se indica.

136. $x=0$

137. $y=-3$

138. $m=\frac{2}{3}$

139. $x=2$

140. $y=-1$

141. $m=-\frac{1}{2}$

142. Completa el proceso de solución de la siguiente ecuación.

$\frac{x}{5}-7+\frac{x}{2}+4=\frac{3x}{10}+3+\frac{x}{4}$ Ecuación original

$\frac{x}{5}+\frac{x}{2}-\frac{3x}{10}-\frac{x}{4}=3+7-4$ _____

$20\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{2}-\frac{3x}{10}-\frac{x}{4}\right)=20(6)$ _____

_____ $=120$ Multiplicando

$3x=120$ _____

$x=$ _____ _____

Despeja x, en los siguientes ecuaciones literales.

143. $2amx-4a=5mx+m-2ax$

144. $y^2-5xy+12y=6y-10x+3$

145. $\frac{3}{4}cbx-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}bx-\frac{1}{8}cx+\frac{cb}{4}$

146. $\frac{2}{5}nx-\frac{n^2}{6}+\frac{x}{10}=\frac{7}{15}-\frac{x}{3}+\frac{nx}{2}$

En las siguientes ecuaciones literales la variable es y, mientras que a y b son constantes. Establece condiciones sobre a y b para que la solución obtenida sea válida.

147. $ay-4=by-2$

148. $3aby-5b=2by+a$

149. $-5by+6ay+7=2+4by-3ay$

150. $(b-3a)y+7a-b=(b-2a)y-5a$

151. $\frac{b-1}{b}=\frac{3b-2y}{b}$

Considera la ecuación

$$2ax-3b=bx+4a$$

152. Verifica que la expresión $x=\frac{4a+3b}{2a-b}$ es solución si se toma a x como la variable.

153. ¿Qué ocurre si $a=1$ y $b=2$?

154. Encuentra otras dos parejas de valores a y b para las cuales ocurra lo mismo que pasa con $a=1$ y $b=2$.

155. ¿Qué restricción presentan las soluciones de esta ecuación?

Resuelve.

156. El largo de un rectángulo equivale a los $\frac{5}{12}$ de su perímetro. Si el ancho del rectángulo es 3 m, ¿cuánto mide el perímetro del rectángulo?

157. La expresión $v_f=v_0+at$ determina la velocidad final de un móvil que arranca con velocidad inicial v_0, acelerando a razón constante a durante un tiempo t.

Encuentra la expresión para hallar a t en términos de v_f, v_0 y a.

1.7 Ecuaciones con fracciones algebraicas

Ampliación multimedia

Matemáticamente

Si x es una incógnita y a, b son constantes, ¿cual de las siguientes ecuaciones es racional?

$\frac{a}{b} + \frac{b}{x} = ab$

$\frac{x+a}{b} = \frac{x}{a}$

Algunas ecuaciones contienen una o más fracciones algebraicas. Este tipo de ecuaciones se conoce como **ecuaciones racionales**.

Por ejemplo, la ecuación $\frac{5}{x} - \frac{1}{3x} = \frac{1}{4}$ es una ecuación racional.

Para resolver una ecuación racional se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se halla el mcm de los denominadores de la ecuación.
- **Segundo,** se multiplica cada miembro de la ecuación por el mcm de los denominadores.
- **Luego,** se simplifica la ecuación para obtener una ecuación sin denominadores.
- **Finalmente,** se resuelve la ecuación resultante.

Recuerda que...

Cuando se resuelven ecuaciones racionales se supone que los denominadores son diferentes de cero.

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones racionales.

a. $\frac{3}{5x} = 20$

$\frac{3}{5x} = 20$

$5 \times \left(\frac{3}{5x}\right) = 5 \times (20)$

$3 = 100x$

$x = \frac{3}{100}$

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = \frac{3}{100}$.

b. $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$	Ecuación.
$6x\left(\frac{1}{3x}\right) + 6x\left(\frac{1}{2}\right) = 6x\left(\frac{1}{x}\right)$	Se multiplica por el mcm $(3x, 2, x)$.
$2 + 3x = 6$	Se simplifica.
$3x = 4$	Se transponen términos.
$x = \frac{4}{3}$	Se divide entre 3.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = \frac{4}{3}$.

c. $\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1}$

$\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1}$

$[(x+1)(x-1)]\left(\frac{3}{x+1}\right) = [(x+1)(x-1)]\left(\frac{2}{x-1}\right)$	Se multiplica por el mcm de los denominadores.
$3(x-1) = 2(x+1)$	Se simplifica.
$3x - 3 = 2x + 2$	Se aplica propiedad distributiva.
$3x - 2x = 2 + 3$	Se transponen términos.
$x = 5$	Se reducen términos semejantes.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = 5$.

2. Determina si $x = 6$ es solución de la ecuación $\frac{x-1}{x} = \frac{3}{x}$.

Se realizan los siguientes pasos:

$\frac{6-1}{6}$ y $\frac{3}{6}$ Se remplaza por $x = 6$.

$\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{2}$ Se simplifica.

Como $\frac{5}{6} \neq \frac{1}{2}$, entonces $x = 6$ no es solución de la ecuación.

3. El triple del inverso multiplicativo de un número diferente de cero, es igual a 10 más la mitad de su inverso multiplicativo. ¿Cuál es el número?

Primero, se plantea la ecuación. Si n es el número, entonces su inverso multiplicativo es $\frac{1}{n}$ y la ecuación es: $3\left(\frac{1}{n}\right) = 10 + \frac{1}{2n}$

Luego, se realizan los siguientes pasos para resolver la ecuación.

$3\left(\frac{1}{n}\right) = 10 + \frac{1}{2n}$	Ecuación.
$\frac{3}{n} = 10 + \frac{1}{2n}$	Se multiplica.
$\frac{3}{n} - \frac{1}{2n} = 10$	Se transponen términos.
$2n\left(\frac{3}{n}\right) - 2n\left(\frac{1}{2n}\right) = 2n(10)$	Se multiplica por mcm $(n, 2n)$.
$6 - 1 = 20n$	Se simplifica.
$5 = 20n$	Se resta.
$n = \frac{1}{4}$	Se despeja n y se simplifica.

Finalmente, se tiene que el número es $\frac{1}{4}$.

4. Encontrar el mcm de los denominadores para resolver la siguiente ecuación

$$\frac{5x-2}{x^2+x-12} - \frac{7}{x+4} = \frac{2}{2x-6}$$

Primero, se halla el mcm de los denominadores. Para esto se factorizan los denominadores y se establecen los factores comunes.

$x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$; $x + 4 = x + 4$; $2x - 6 = 2(x-3)$

Así, el mcm es $2(x+4)(x-3)$.

Luego, se realizan los siguientes pasos:

$\frac{5x-2}{(x+4)(x-3)} - \frac{7}{(x+4)} = \frac{2}{2(x-3)}$	Se factorizan los denominadores.
$2(5x-2) - 2[7(x-3)] = 2(x+4)$	Se multiplica por el mcm y se simplifica.
$10x - 4 - 14x + 42 = 2x + 8$	Se aplica la propiedad distributiva.
$10x - 14x - 2x = 4 + 8 - 42$	Se transponen términos.
$-6x = -30$	Se reducen términos semejantes.
$x = 5$	Se divide entre -6.

Finalmente, la solución de la ecuación es $x = 5$.

> ***Recuerda que...***
> Si $n \neq 0$ la mitad de su inverso multiplicativo es:
> $\frac{\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2n}$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Marca con un ✓ las ecuaciones que son racionales. Ten en cuenta que x es la incógnita y a, b son constantes diferentes de cero.

158. $\frac{1}{3} = \frac{a}{x} + \frac{b}{3}$ ☐

159. $\frac{x}{7} = \frac{1}{x} - \frac{2}{5}$ ☐

160. $\frac{x}{a} = \frac{2}{b} + \frac{3}{ab}$ ☐

161. $\frac{7}{x} = \frac{2}{a} - \frac{3}{b+x}$ ☐

162. Completa la tabla.

Ecuación	Valor de la incógnita	¿Es solución?
$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2x}$	$\frac{3}{2}$	
$5 + \frac{2}{x+2} = -1$	8	
$\frac{1}{3x} = \frac{2}{5} - \frac{x}{6}$	$-\frac{2}{3}$	
$\frac{2}{5+x} - 1 = \frac{3}{x+5}$	-6	

Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

163. $\frac{2}{5} - \frac{5}{7} = \frac{1}{x}$

164. $\frac{1}{a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

165. $\frac{3}{m} + \frac{5}{3m} = 1$

166. $\frac{3}{9m-9} + \frac{1}{4m+4} - \frac{1}{12m-12} = 0$

167. $-\frac{7}{10} + \frac{3x+1}{4x+4} = \frac{1}{5}$

168. $\frac{y^2}{y^2-4} = \frac{y}{y+2} + \frac{2}{2-y}$

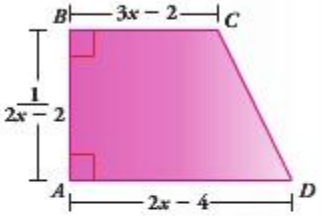
169. $\frac{2}{3b-1} + \frac{6b^2}{9b^2-1} = \frac{2}{3}$

170. $\frac{x-5}{x^2+2x-3} - \frac{x-4}{x^2-9} = \frac{5}{x^2-4x+3}$

171. Escribe una ecuación racional que cumpla las siguientes condiciones. Luego, resuélvela.

- En cada miembro de la ecuación hay una fracción algebraica y el mcm de los denominadores es $12x$.
- Uno de los términos en el primer miembro de la ecuación es -15.

Un estudiante afirma que es imposible construir un trapecio como el de la figura, si su área es de solo 8 unidades cuadradas.



172. Explica por qué el estudiante está equivocado.

173. Determina la medida de la altura y de las bases del trapecio, cuando el área es de 8 unidades cuadradas.

Propón valores para a, b y c en cada una de las siguientes ecuaciones en las que y es la incógnita. Luego, resuélvelas.

174. $\frac{a}{by} - \frac{a}{b} = 2$

175. $\frac{a+b}{y} + \frac{1}{a-b} = \frac{c}{y}$

176. $\frac{a}{y-2} + \frac{b}{y^2-4} = \frac{5}{y+2}$

177. $\frac{a-c}{y} - \frac{a+b}{3y} = \frac{1}{y^2}$

Resuelve.

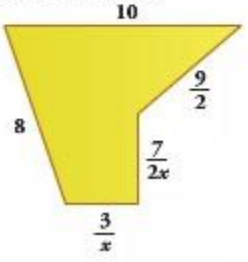
178. Halla el número que sumado con su recíproco equivale al número disminuido en 2.

179. Determina el valor de x que hace verdadera la igualdad entre cada fracción algebraica de la fila y cada fracción algebraica de la columna.

	$\frac{4}{3x+2^3}$	$\frac{5}{5(x+1)}$
$\frac{8}{2=2x}$	$-\frac{7}{2}$	
$\frac{(-2)^2}{2x+11}$		



180. Calcula el valor de x en la siguiente figura, si su perímetro es de 43 cm.



1.8 Solución de problemas con ecuaciones

Actividad

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita se aplican para resolver problemas relacionados con edades, mezclas, velocidades, costos, entre otros.

EJEMPLOS

1. Hace 6 años las diferencia entre la edad de Marcela y la edad de Carlos era de 8 años. Si actualmente las edades de ambos suman 32 y Carlos es mayor que Marcela, ¿cuál es la edad de ambos?



Primero, se representa con m la edad de Marcela. Como la suma de ambas edades es 32, entonces la edad de Carlos es $32 - m$, de donde se tiene que:

	Actualmente	Hace 6 años
Edad de Marcela	m	$m - 6$
Edad de Carlos	$32 - m$	$(32 - m) - 6$

Luego, como hace 6 años la diferencia entre la edad de Marcela y la edad de Carlos era de 8 años, y Carlos es mayor que Marcela, entonces se realizan los siguientes pasos:

$[(32 - m) - 6] - (m - 6) = 8$ Se plantea la ecuación.

$26 - m - m + 6 = 8$ Se suprimen signos de agrupación.

$-m - m = 8 - 26 - 6$ Se transponen términos.

$-2m = -24$ Se reducen términos semejantes.

$m = 12$ Se divide entre -2.

Como la edad de Marcela es m se tiene que:

- La edad de Marcela es 12 años.
- la edad de Carlos es $32 - m$, entonces: $32 - 12 = 20$.

Finalmente, Marcela tiene 12 años y Carlos, 20.

2. Una empresa de alquiler de automóviles cobra $80.000 el alquiler más $2.000 por kilómetro recorrido. Si un cliente tiene $320.000, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer cuando rente el automóvil?

Primero, se representa con x la cantidad de kilómetros.

Luego, se plantea la ecuación y se resuelve así:

$80.000 + 2.000x = 320.000$ Se plantea la ecuación.

$2.000x = 320.000 - 80.000$ Se transponen términos.

$2.000x = 240.000$ Se resta.

$\frac{2.000x}{2.000} = \frac{240.000}{2.000}$ Se divide entre 2.000.

$x = 120$ Se simplifica.

Finalmente, se tiene que el cliente podrá recorrer 120 km con $320.000.

3. Dos motociclistas *A* y *B* parten de un mismo punto con velocidades constantes de 60 km/h y 80 km/h, respectivamente. Si ambos motociclistas siguen la misma trayectoria recta, ¿en cuántas horas la distancia entre los dos será de 28 km?



Primero, como las velocidades son constantes, entonces se aplica la expresión $d = vt$, donde d es la distancia, v la velocidad y t el tiempo. Así, se obtiene la siguiente tabla:

Motociclistas	Velocidad	Tiempo	Distancia
A	60	t	$60t$
B	80	t	$80t$

Luego, se plantea la diferencia entre las distancias y se resuelve así:

$80t - 60t = 28$ Se plantea la ecuación.

$20t = 28$ Se reducen términos semejantes.

$t = 1{,}4$ Se divide entre 20.

Entonces como $t = 1{,}4$ h, se comprueba que:

La distancia del motociclista *A* es: $60(1{,}4) = 84$ km

La distancia del motociclista *B* es: $80(1{,}4) = 112$ km

La distancia entre los dos motociclistas es: $112 - 84 = 28$ km

Finalmente, se tiene que al cabo de 1,4 horas la distancia entre ambos motociclistas será de 28 kilómetros.

4. El administrador de una joyería comercializa anillos de plata y oro. El precio de cada anillo de plata es de 22 dólares y el de cada anillo de oro es de 104 dólares. Si en un mes negoció 14 anillos por 1.128 dólares, ¿cuántos anillos de cada tipo vendió?



Primero, se representa con x el número de anillos de oro. Así, el número de anillos de plata es $14 - x$.

Luego, se realizan los siguientes pasos:

$22(14 - x) + 104x = 1.128$ Se plantea la ecuación.

$308 - 22x + 104x = 1.128$ Se aplica la propiedad distributiva.

$-22x + 104x = 1.128 - 308$ Se transponen términos.

$82x = 820$ Se reducen términos semejantes.

$\frac{82x}{82} = \frac{820}{82}$ Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 82.

$x = 10$ Se simplifica.

Finalmente, se tiene que se vendieron 10 anillos de oro y 4 anillos de plata.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Lee el siguiente problema. Luego, resuelve.

En un campeonato de baloncesto, los tres primeros puestos se repartirán 2.000 dólares. Si el segundo puesto recibirá el doble que el tercer puesto, y el primer puesto recibirá 350 dólares más que el segundo puesto, ¿cuánto recibirá cada uno?

181. Escribe la incógnita y la cantidad que representa.

_____

182. Completa la tabla en términos de la incógnita.

Puesto	Cantidad en dólares que recibirá
1	
2	
3	

183. Plantea la ecuación y resuélvela.

184. Escribe la solución y redacta la respuesta.

_____

_____

Relaciona cada problema con su ecuación correspondiente. Luego, resuelve.

185. El lado de un cuadrado es x. Si su perímetro mide 75 cm, ¿cuál es el valor de x?

186. El largo de un rectángulo mide 4 cm y su ancho mide x. ¿Cuál es el valor de x si el perímetro del rectángulo es 75 cm?

187. El largo y el ancho de un rectángulo miden 75 cm y x respectivamente. Si el área del rectángulo es 4 cm^2, ¿cuál es el valor de x?

a. $\frac{x}{4} = 75$

b. $x + 4 = \frac{75}{2}$

c. $x - 4 = 75$

d. $75x = 4$

e. $4x = 75$

Determina si el procedimiento que se aplicó para resolver el siguiente problema es correcto. Si es incorrecto corrígelo y halla la solución verdadera.

188. Fernando tiene 4 años más que Diana y dentro de 3 años, ambas edades sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

f: edad de Fernando.

$f + 4$: edad de Diana.

$f + (f + 4) = 20$ Se plantea la ecuación.

$f + f = 20 - 4$ Se transponen términos.

$2f = 16$ Se reducen términos semejantes.

$f = 8$ Se divide entre 2.

Así, Fernando tiene 8 años y Diana, 12.

Redacta un problema con los datos dados en cada caso. Luego, plantea una ecuación y resuélvela.

189. Edad de María: x

Edad de Juan: $x - 4$

Suma de las edades: 36 años.

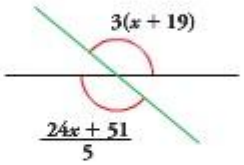
190. Ancho de un rectángulo: a

Largo del rectángulo: $a + 5$

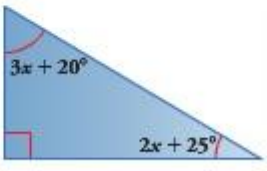
Perímetro: 42 cm

Plantea una ecuación en cada caso para determinar la medida de los ángulos indicados.

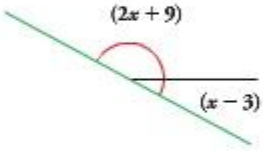
191.



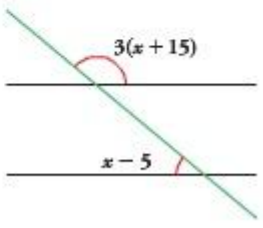
192.



193.



194.



R **Lee cada enunciado. Luego, halla los números desconocidos en cada caso.**

195. La suma de dos números es 34 y el doble del mayor equivale al triple del menor más 53.

196. La suma de dos números es 27 y el doble del mayor equivale a 19 más el triple del menor.

197. La quinta parte de un número aumentado en 3 es igual al número menos 10.

198. La tercera parte del doble de un número más 7, equivale a la mitad del triple del número menos 4.

S **Resuelve los siguientes problemas.**

199. Halla la medida de un ángulo de tal forma que el doble de su suplemento equivale a cuatro veces su complemento aumentado en 12 grados.

200. Un carpintero tiene un listón de madera de 3 metros de largo y necesita dividirlo en dos partes de tal forma que una de ellas mida 60 cm más que el doble de la otra. ¿Cuál es la medida de cada listón resultante?



201. La edad de un padre es el triple que la de su hijo. Si la edad del padre hace 5 años era igual al doble de la edad que tendrá su hijo en 10 años, ¿cuáles son las edades actuales de padre e hijo?

202. En una presentación musical se cobró $20.000 por la entrada de cada niño y $50.000 por la entrada de cada adulto. Si asistieron 400 personas en total y el número de adultos excede al doble del número de niños en 10, ¿cuánto dinero fue recaudado en total?



203. Los ahorros de David y Milena suman $63.000. Si Milena gastara la mitad y David los $\frac{2}{5}$, entonces Milena tendría $15.000 más que David. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

204. El costo C en dólares del alquiler de un automóvil deportivo está dado por la expresión $C = 25x + 125$, donde x es el número de kilómetros que recorre el automóvil. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer un cliente en el automóvil para que su alquiler cueste 875 dólares?



205. Los tres socios de una empresa resolvieron liquidarla. Para esto, deciden repartirse 60.000 dólares, de tal forma que el primer socio reciba 3 veces más que al segundo y el tercero dos veces más que el primero. ¿Cuántos dólares debe recibir cada socio?

206. Alberto le dió propina a tres meseros en un restaurante: Juan, Carolina y Luis. A Juan le dió $3.800 más que a Luis, pero $1.000 menos que a Carolina. Si lo que recibió Luis es la quinta parte de lo que recibió Carolina, ¿cuánto recibió cada uno?

207. El salario mínimo para el 2012 en Colombia fue de $566.700. Si con respecto al 2011 aumentó 5,8%, ¿cuál fue el salario mínimo en el 2011?

208. Dos automóviles viajan en una carretera recta separados por una distancia de 15 km. Ambos automóviles se desplazan con una rapidez constante en la misma dirección. ¿Cuál es la diferencia entre las velocidades de ambos automóviles si se han desplazado durante 20 minutos y partieron del mismo punto?

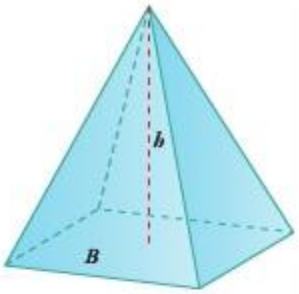
209. Una máquina A construye una serie de productos en 6 horas. Cuando la máquina A trabaja simultáneamente con la máquina B, la construcción de los productos se hace en 2 horas. ¿Cuánto tiempo emplea la máquina B en construir la serie de productos cuando se pone a trabajar sola?

210. Para elegir el personero de un colegio, se realizó una votación en la cual se registró un total de 560 votos. Miguel obtuvo 75 votos menos que Camilo y 55 votos más que Leonardo. ¿Cuántos votos obtuvo cada candidato?



1.9 Fórmulas

Las **fórmulas** son expresiones algebraicas que relacionan las variables que intervienen en una ley o principio general. Despejar una variable en una fórmula, significa expresarla en términos de las otras variables.



Por ejemplo, la fórmula para calcular el volumen (V) de un pirámide de altura (h).

$$V = \frac{A_B h}{3}$$

Donde A_B es el área de la base.

Para despejar la altura de esta fórmula se multiplican por 3 ambos miembros de la ecuación y se divide entre A_B, con lo cual se obtiene que $h = \frac{3V}{A_B}$.

EJEMPLOS

1. El área total de la superficie de un cilindro de radio r está dada por la expresión:

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$



a. Calcular el área total de un cilindro de 8 cm de radio y 12 cm de altura.

$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ Fórmula para el área total.

$A_T = 2\pi(8)^2 + 2\pi(8)(12)$ Se remplazan r y h.

$A_T = 128\pi + 192\pi = 320\pi$ Se realizan operaciones.

Por tanto, el área total del cilindro es 320π cm².

b. Despejar la altura h.

$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ Fórmula.

$A_T - 2\pi r^2 = 2\pi rh$ Se transponen términos.

$\frac{A_T - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{2\pi rh}{2\pi r}$ Se divide entre $2\pi r$.

$\frac{A_T}{2\pi r} - r = h$ Se simplifica.

Por tanto, la expresión para calcular la altura (h) de un cilindro en términos de su área total y de su radio es

$h = \frac{A_T}{2\pi r} - r$

2. La fórmula para convertir una temperatura de grados centígrados a grados Fahrenheit es:

$$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$$

Donde T_C es la temperatura en grados centígrados y T_F en grados Fahrenheit.



a. Obtener la fórmula para convertir de grados Fahrenheit a grados centígrados.

$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$ Fórmula dada.

$T_F - 32 = \frac{9}{5} T_C$ Se resta 32.

$5(T_F - 32) = 9T_C$ Se multiplica por 5.

$\frac{5}{9}(T_F - 32) = T_C$ Se divide entre 9.

Por tanto, para convertir grados Fahrenheit a centígrados se aplica la expresión: $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$.

b. Convertir 140 °F a grados centígrados.

$T_C = \frac{5}{9}(140 - 32)$ Se remplazan los grados Fahrenheit.

$T_C = \frac{5}{9}(108) = 60$ Se realiza la resta.

Por tanto, 140 °F equivalen a 60 °C.

c. Convertir 32 °F a grados centígrados.

$T_C = \frac{5}{9}(32 - 32)$ Se remplazan los grados Fahrenheit.

$T_C = \frac{5}{9}(0) = 0$ Se realiza la resta.

Por tanto, 32 °F equivale a 0 °C.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Responde.

211. ¿Qué es una fórmula?

212. Si $A = \pi r^2$ es la fórmula para calcular el área de un círculo, ¿cuál es la fórmula para calcular el radio de un círculo en términos de su área?

Despeja la variable indicada en cada fórmula.

213. $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ para b.

214. $\frac{PV}{T} = \frac{P_1V_1}{T_1}$ para T.

215. $w = \frac{as^2}{c} - b$ para c.

216. $a_n = a_1 + d(n-1)$ para n.

217. $V = \frac{a}{b(c - dr)}$ para r.

218. $V = \frac{a}{b(c - dr)}$ para c.

219. $\frac{k(at^2 + b)}{c} = w$ para t.

220. $2am = \frac{3b - 5}{x}$ para b.

221. $s = k - \frac{q}{c}$ para c.

222. $\frac{km - t}{w^2} = 3m + a$ para w.

En física, la expresión para calcular el alcance horizontal de un objeto que sigue una trayectoria parabólica es:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Donde v_0 es la velocidad inicial, g es la aceleración de la gravedad y t es el tiempo.

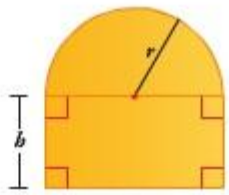


223. Demuestra que la expresión para calcular la velocidad inicial es $v_0 = \frac{x}{t} - \frac{gt}{2}$.

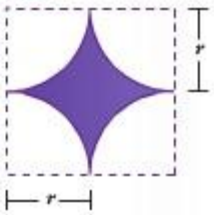
224. Calcula la velocidad inicial con la que se disparó un proyectil, si su trayectoria es parabólica $x = 560$ m, $g = 10$ m/s^2 y $t = 8$ s.

Escribe una fórmula para calcular el área sombreada de cada una de las siguientes figuras.

225.



226.



Lee la siguiente información. Luego resuelve.

El sobrepeso es un problema de salud que puede prevenirse. La siguiente fórmula relaciona el peso p (en kilogramos) con la estatura a (en centímetros) que puede alcanzar una persona.



$$400 \times p = a^2$$

227. Calcula el peso límite que puede alcanzar una persona de 1,8 m de estatura. Halla la estatura para un peso límite de 60 kg.

Una empresa de teléfonos cobra a sus usuarios $30 por los primeros 3 minutos de conversación y $12 por cada minuto o fracción adicional que dure la llamada.

228. ¿Cuánto costará una llamada que dura 18 minutos?

229. Escribe una fórmula para calcular el costo de una llamada con esta empresa.

230. ¿Cuánto duró una llamada por la que la empresa cobró $270?

La energía cinética de un cuerpo es aquella que este posee debido a su movimiento y está dada por la expresión:

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

Donde m es la masa y v es la velocidad.

231. Despeja la velocidad v.

232. Calcula la velocidad de un cuerpo de 60 kg si su energía es de 120 J.

(Ten en cuenta que 1 J es 1 kg m^2/s^2.)

2. Inecuaciones

De la misma forma que se utiliza el signo igual (=) para establecer igualdades y ecuaciones, los signos mayor que (>) y menor que (<) se utilizan para plantear desigualdades e inecauciones.

2.1 Desigualdades

Una **desigualdad** es una expresión que establece una relación matemática de orden entre dos cantidades, es decir, que indica que una cantidad es mayor o menor que otra.

Por ejemplo, las expresiones $3 < 5$ y $12 - 7 > -8$ son desigualdades.

En una desigualdad, el primer miembro es aquel que se encuentra a la izquierda del signo $>$ o $<$, y el segundo miembro es aquel que se encuentra a la derecha.

Así, en la desigualdad $8 - 3 < -2$, el primer miembro es $8 - 3$ y el segundo miembro es -2.

Propiedades de las desigualdades

En una desigualdad se cumplen las siguientes propiedades:

- Si se suma o se resta un mismo número en ambos miembros de la desigualdad, entonces la desigualdad se conserva.

$$\text{Si } a > b \text{ y } c \in \mathbb{R}, \text{ entonces } a + c > b + c \text{ y } a - c > b - c.$$

- Si se multiplica o se divide entre un número positivo ambos miembros de la desigualdad, entonces la desigualdad se conserva.

$$\text{Si } a > b \text{ y } c \in \mathbb{R}^+, \text{ entonces } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

- Si se multiplica o divide entre un número negativo ambos miembros de la desigualdad, entonces, cambia el sentido de la desigualdad.

$$\text{Si } a > b \text{ y } c \in \mathbb{R}^-, \text{ entonces } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

- Si $a < b$ y $b < c$, entonces, $a < c$, es decir, las desigualdades cumplen la propiedad transitiva.

Por ejemplo, a partir de la desigualdad $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ se tiene que:

- Si se suma 2 en ambos miembros de la desigualdad, entonces se obtiene $\frac{7}{3} > \frac{11}{5}$ y la desigualdad se mantiene.
- Si se resta 2 en ambos miembros de la desigualdad, entonces, se obtiene que $-\frac{5}{3} > \frac{-9}{5}$ y la desigualdad se mantiene.
- Si se multiplica por 4 ambos miembros de la desigualdad, entonces se obtiene que $\frac{4}{3} > \frac{4}{5}$ y la desigualdad se mantiene.
- Si se multiplica por -3 ambos miembros de la desigualdad, entonces se obtiene que $-1 < -\frac{3}{5}$ y la desigualdad cambia de sentido.

- Como $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, y dado que $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$, entonces, $\frac{1}{2} < \frac{1}{5}$.

2.2 Inecuaciones de primer grado

Recurso imprimible · Actividad

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que solo se cumple para determinados valores de la variable o variables que se presenten.

Por ejemplo, la desigualdad $2x - 6 < 5x$ es una inecuación de primer grado con una incógnita, porque el mayor exponente de x es 1.

Resolver una inecuación es hallar los valores de la incógnita que satisfacen la inecuación dada. Para esto, se aplican las propiedades de las desigualdades.

La solución de una inecuación se representa en forma de intervalo como se muestra en la siguiente tabla.

Solución	Lectura	Intervalo	Representación de la recta
$x > a$	Números mayores que a	(a, ∞)	
$x < a$	Números menores que a	$(-\infty, a)$	
$x \geqslant a$	Números mayores o iguales que a	$[a, \infty)$	
$x \leqslant a$	Números menores o iguales que a	$(-\infty, a]$	

Historia de las matemáticas

Los signos > y <

Los signos mayor que (>) y menor que (<) fueron creados por el matemático y astrónomo inglés Thomas Harriot (1560-1621).



Actualmente, los signos de las desigualdades también se aplican en lenguajes de programación como *Python* en el que se utilizan desigualdades encadenadas de la forma:

$a < b > c \leqslant d$

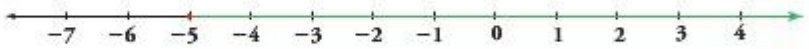
EJEMPLOS

1. Determinar cómo se lee la desigualdad $x < 15$.

Esta desigualdad se lee como los números menores que 15.

2. Representar la desigualdad $x \geqslant -5$ en la recta numérica.

La desigualdad $x \geqslant -5$ corresponde al intervalo $[-5, \infty)$. Por tanto, su representación en la recta numérica es:

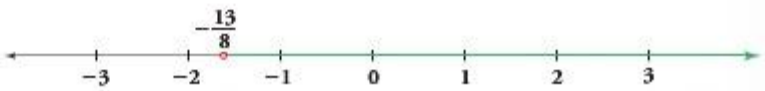


3. Resolver la inecuación $x + 3(x - 5) < 6 - 4(2 - 3x)$.

Se realizan los siguientes pasos:

$x + 3(x - 5) < 6 - 4(2 - 3x)$	Inecuación.
$x + 3x - 15 < 6 - 8 + 12x$	Se aplica la propiedad distributiva.
$x + 3x - 12x < 6 - 8 + 15$	Se resta $12x$ y se suma 15.
$-8x < 13$	Se reducen términos semejantes.
$x > -\frac{13}{8}$	Se divide entre -8 y se cambia el sentido de la desigualdad.

Por tanto, la solución de la inecuación es el conjunto de números reales mayores que $-\frac{13}{8}$ que corresponde al intervalo $\left(-\frac{13}{8}, \infty\right)$ y se representa así:



4. El cociente entre $11x - 33$ y $x - 4$ es mayor o igual que 9. Determinar los valores de x que cumplen la desigualdad.

Se debe tener en cuenta que al hablar del cociente, se refiere a la división. Luego, la expresión el cociente entre $11x - 33$ y $x - 4$ se escribe como:

$$\frac{11x - 33}{x - 4}$$

Primero, se realizan los siguientes pasos:

$\frac{11x - 33}{x - 4} \geqslant 9$ Se plantea la inecuación.

$\frac{11x - 33}{x - 4} - 9 \geqslant 0$ Se resta 9 en ambos miembros de la inecuación.

$\frac{11x - 33 - 9(x - 4)}{x - 4} \geqslant 0$ Se restan las fracciones.

$\frac{11x - 33 - 9x + 36}{x - 4} \geqslant 0$ Se aplica la propiedad distributiva.

$\frac{2x + 3}{x - 4} \geqslant 0$ Se reducen términos semejantes.

Luego, para que se cumpla esta desigualdad se presentan dos casos:

Caso 1	Caso 2
El numerador es mayor o igual que cero y el denominador es mayor que cero. $2x + 3 \geqslant 0 \quad y \quad x - 4 > 0$ $x \geqslant -\frac{3}{2} \quad y \quad x > 4$	El numerador es menor o igual que cero y el denominador es menor que cero. $2x + 3 \leqslant 0 \quad y \quad x - 4 < 0$ $x \leqslant -\frac{3}{2} \quad y \quad x < 4$
Así, la solución en este caso está dada por la intersección de los intervalos $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$ y $(4, \infty)$, como se muestra en la siguiente recta: 	Así, la solución en este caso corresponde a la intersección de los intervalos $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ y $(-\infty, 4)$, como se muestra en la siguiente recta: 
Por tanto, la solución es: $(4, \infty)$.	Por tanto, la solución es: $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

Finalmente, se tiene que la solución de la inecuación $\frac{11x - 33}{x - 4} \geqslant 9$ corresponde a la unión de las soluciones de ambos casos.

Así, la solución final es $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup (4, \infty)$ y su representación en la recta numérica es:



> ***Recuerda que...***
> Para determinar la intersección entre dos intervalos numéricos se deben identificar los números que están en ambos intervalos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Completa cada enunciado.

233. Si $a > b$ y $b > c$, entonces se cumple que _____.

234. Si $a > b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que _____.

235. Si $a < b$ y _____, entonces se cumple que $ac > bc$.

236. Si $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ entonces se cumple que a _____ b.

Determina si cada proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

237. Toda desigualdad es una inecuación.

238. La desigualdad $a > \frac{1}{b}$ se cumple para todos los valores de a y de b.

239. Si $0 < a \leq b$, entonces $a^2 \leq b^2$.

240. Si $a, b > 0$, entonces $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a+b}$

241. Completa la siguiente tabla.

Desigualdad	Intervalo	Recta numérica
$x \geq -3$		
	$[9, \infty)$	
		$-\frac{1}{8}$
	$(-\infty, -7]$	
		-8
		1
	$\left(-\infty, -\frac{11}{3}\right]$	
$\frac{5}{6} > m$		

Propón una expresión para completar cada inecuación. Luego, halla el intervalo solución.

242. $x + 3 >$ _____

243. $3(x - 2) <$ _____

244. _____ $\geq -\frac{1}{2}x + 1$

245. _____ $\leq -\frac{3}{5}(x + 2)$

Resuelve las siguientes inecuaciones teniendo en cuenta que $x \in \mathbb{N}$ y $y \in \mathbb{R}$. Luego, escribe en el orden indicado las letras correspondientes a los conjuntos solución del ejercicio 246 al 253 y descubrirás el nombre de un juego.

246. $4x \leq 3x + 4$

247. $3x + 4 < x + 10$

248. $10x + 20 > 530$

249. $4y - 8 < 3y - 11$

250. $9y - 5 \geq 8y - 6$

251. $11 - 5x \geq -19$

252. $5y - 3 < 4y - 6$

253. $17 - 3y \leq -2y - 3$

M = {0, 1, 2, 3}	O = {−3, −2, −1}
D = [−1, ∞)	A = {0, 1, 2}
L = {−1, 0, 1}	J = {52, 53, 54...}
E = (−∞, −3)	S = [21, ∞)
R = {0, 1, 2, ..., 6}	Z = [20, ∞)

254. Explica por qué el razonamiento de Ana es incorrecto.

Ana dice: "Sabemos que $-5 < -4$. Si multiplicamos cada miembro de la desigualdad por k, obtenemos $-5k < -4k$. Por tanto, si remplazamos $k = -3$ obtenemos $15 < 12$".

Escribe una inecuación cuya solución sea el intervalo que se representa en la recta numérica.

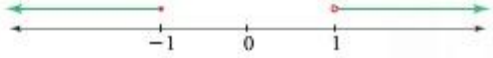
255.



256.



257.



Resuelve.

258. Halla el intervalo solución de la inecuación $\frac{9x - 2}{2x + 3} \leq 6$.

259. Mariana tiene la mayor edad posible que resulta de resolver $x < 50 - 3x$ y $10x + 24 < 16x + 2$. ¿Cuál es la edad de Mariana?

260. Halla el intervalo solución de la inecuación $3 \leq \frac{5x - 1}{4}$.

Ampliación multimedia · Recurso imprimible · Actividad

2.3 Solución de problemas con inecuaciones

Las inecuaciones se aplican en situaciones en las que se necesita conocer el valor máximo o mínimo de una variable. Por ejemplo, las inecuaciones se utilizan en la producción industrial, la mercadotecnia, la publicidad, la administración de empresas, entre otras.

EJEMPLOS

1. Cristina gana por hora el doble de lo que gana Daniela. Si Cristina trabaja 8 horas y Daniela, 5 horas, juntas ganan menos de $126.000. Máximo, ¿cuánto podrá ganar Daniela por hora?

Primero, se plantea una inecuación. Si x es lo que gana Daniela por hora, entonces Cristina gana $2x$ y la inecuación es

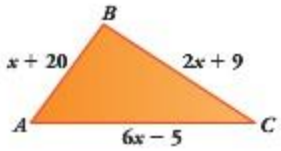
$8(2x) + 5(x) < 126.000$.

Luego, se resuelve la inecuación así:

$8(2x) + 5(x) < 126.000$	Inecuación.
$16x + 5x < 126.000$	Se multiplica.
$21x < 126.000$	Se reducen términos semejantes.
$\frac{21x}{21} < \frac{126.000}{21}$	Se divide entre 21.
$x < 6.000$	Se simplifica.

Finalmente, se tiene que Daniela máximo podrá ganar $6.000 por hora.

2. Determinar las medidas máximas de los lados del triángulo, si su perímetro debe ser menor que 60 cm.



Se realizan los siguientes pasos:

$(x + 20) + (2x + 9) + (6x - 5) < 60$	Se plantea la inecuación.
$x + 20 + 2x + 9 + 6x - 5 < 60$	Se eliminan signos de agrupación.
$9x < 60 - 24$	Se reducen términos semejantes y se resta 24.
$\frac{9x}{9} < \frac{36}{9}$	Se divide entre 9.
$x < 4$	Se simplifica.

Luego, se aplican propiedades de las desigualdades para determinar la medida máxima de cada lado.

AB	*BC*	*AC*
$x < 4$	$x < 4$	$x < 4$
$x + 20 < 24$	$2x < 8$	$6x < 24$
	$2x + 9 < 17$	$6x - 5 < 19$

3. La fuerza de estiramiento de un nuevo tipo de plástico varía con la temperatura T, de acuerdo con la fórmula $F = 500 - 600T$.

¿Para qué temperaturas se logra que la fuerza de estiramiento de este tipo de plástico sea mayor que 5.300?

Primero, se utiliza la fórmula $F = 500 - 600T$ para plantear la inecuación así:

$$500 - 600T > 5.300$$

Luego, se resuelve la inecuación.

$500 - 600T > 5.300$	Inecuación.
$-600T > 5.300 - 500$	Se transponen términos.
$-600T > 4.800$	Se resta.
$\frac{-600T}{-600} < \frac{4.800}{-600}$	Se divide entre -600 y se cambia el sentido de la desigualdad.
$T < -8$	Se simplifica.

Finalmente, se tiene que con temperaturas menores a -8 °C se logra que la fuerza de estiramiento F sea mayor a 5.300.

4. Se tienen 800 m de alambre para cercar un terreno rectangular, como el que se muestra en la figura. ¿Cuál es la medida máxima del largo del terreno para que el alambre alcance para cercarlo?



Primero, se tiene que el perímetro de un rectángulo está dado por la expresión: $p = 2l + 2a$, donde l es el largo y a es el ancho.

Como el perímetro del terreno corresponde a la cantidad de alambre que se tiene para cercarlo, entonces la inecuación que representa la situación es:

$$2l + 2(83) \leq 800$$

Luego, se resuelve la inecuación.

$2l + 2(83) \leq 800$	Inecuación.
$2l + 166 \leq 800$	Se multiplica.
$2l \leq 800 - 166$	Se transponen términos.
$2l \leq 634$	Se resta.
$\frac{2l}{2} \leq \frac{634}{2}$	Se dividen ambos miembros de la inecuación entre 2.
$l \leq 317$	Se simplifica.

Finalmente, se tiene que el largo del terreno debe medir máximo 317 metros.

Como la medida del largo debe ser mayor o igual que la medida del ancho, entonces el intervalo solución es [83, 317].

Su representación en la recta numérica es:



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Responde las preguntas con base en la información de la tabla.

Valor energético de algunos alimentos		
Alimento	**Cantidad**	**Energía (kcal)**
Arroz	100 g	270 a 350
Pan	100 g	250 a 260
Pizza	100 g	180 a 250
Jamón	100 g	170 a 200
Pollo	100 g	120 a 200
Plátano	100 g	85 a 95
Gaseosa	100 mL	40 a 60
Tomate	100 g	50 a 55
Manzana	100 g	60 a 75

261. ¿Cuál es el máximo valor energético de 300 g de pizza?

262. ¿Cuál es el mínimo valor energético de 250 g de manzana?

263. ¿Cuál es el máximo valor energético de un menú compuesto por 100 g de tomate, 200 g de pollo, 100 g de arroz y 150 g de plátano?

264. Si al doble de la edad de Carolina se le resta 20, resulta un valor menor que 36. Pero si a la mitad de su edad se le suma 8, el resultado es mayor que 21. Explica paso a paso cómo hallar la edad de Carolina.

Escribe un problema para cada inecuación. Luego, resuélvelo.

265. $x > 2x - 6$

266. $y - 3 < 2y$

267. $m + 2 \geq 5m$

268. $n + 3 \leq 4n$

Representa con una inecuación cada enunciado. Luego, halla el intervalo solución y represéntalo en la recta numérica.

269. El triple de un número disminuido en 15 es menor que 57. ¿Cuál es el número?

270. La tercera parte de un número aumentada en 20 es mayor que 2. ¿Cuál es el número?

271. Cinco veces un número más 11 es menor o igual que el doble del número. ¿Cuál es el cuadrado del número?

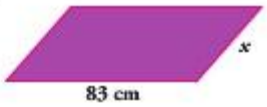
272. La suma de tres números consecutivos debe ser menor que 981. ¿Cuáles son los números más grandes que cumple esta condición?

Resuelve.

273. Si el largo de un rectángulo es 5 veces la medida del ancho y el perímetro es máximo 30 metros, ¿cuáles pueden ser las medidas del ancho?

274. Si el área de un triángulo rectángulo es menor que 80 cm^2 y la base es 10 cm, ¿qué valores puede tomar la altura?

275. Determina la inecuación que representa la máxima medida del lado x del siguiente paralelogramo, de tal forma que su perímetro sea menor que 480 cm.



276. Fabián quiere repartir $114.000 entre sus dos hijos. Si al mayor le corresponde el doble que al menor, ¿cuáles son las máximas cantidades que puede recibir cada uno?

277. Si una persona bebe m gramos de alcohol entonces su sangre contendrá $\frac{m}{0{,}7 \times p}$ gramos de alcohol, donde p es el peso de la persona en kilogramos. ¿Cuál es la cantidad máxima de alcohol que puede tener un conductor de 60 kg si a partir de 0,5 g/L comete una infracción?



278. La dureza (D) del agua depende de su concentración expresada en mg/L de calcio (Ca) y magnesio (Mg), y está dada por la fórmula:

$$D = 10\left(\frac{Ca}{40{,}1} + \frac{Mg}{24{,}3}\right)$$

¿Cuál es la mayor concentración de calcio que debe tener el agua para que su dureza sea de 43 si tiene una concentración de magnesio de 11 mg/L?

EJERCICIOS PARA REPASAR

Ecuaciones

Completa las ecuaciones para que la solución indicada sea correcta.

279. Si $6x = 3x +$ _____, la solución es $x = -2$.

280. Si $4x = x +$ _____, la solución es $x = 1$.

281. Si $3x = -x +$ _____, la solución es $x = 4$.

282. Si $x +$ _____ $= 3x - 2$, la solución es $x = 2$.

Observa el siguiente cuadrado mágico en el que la suma de cada fila, columna y diagonal de tres casillas es la misma. Luego, resuelve.

$x - 1$	$2x + 1$	$3(x - 1)$
$5x - 6$	$x + 2$	$x - 2$
$x + 1$	x	$2(x + 1)$

283. Escribe la expresión que representa la suma de la primera fila.

_____

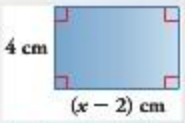
284. Iguala dos filas o columnas y despeja la incógnita x.

285. Se tiene que $a, b \in \mathbb{Z}^-$ y además se cumplen las siguientes igualdades.

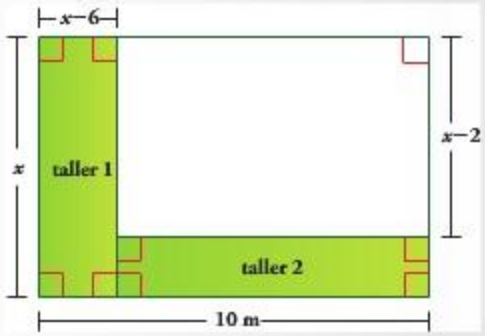
$$M = \frac{a+b}{b} \quad \text{y} \quad N = \frac{b-a}{b}$$

Calcula $2a - 3b$ si $M = \frac{13}{8}$ y $N = \frac{3}{8}$.

286. ¿Cuál es el perímetro P del rectángulo si su área es de 20 cm²?



287. Un comerciante decide dividir su local, como se muestra en al figura:

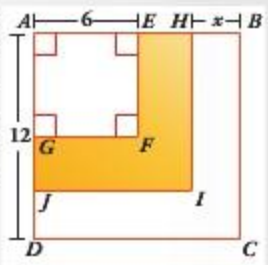


¿Cuál debe ser la medida de x para que los dos talleres tengan el mismo perímetro?

288. Al aumentar un número en el 8% el resultado es 162. ¿Cuál es el número?

_____

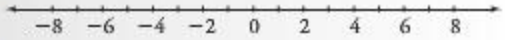
289. Halla el valor de x si el perímetro de la región sombreada es 40 m. Además $AHIJ$ y $ABCD$ son cuadrados.



Inecuaciones

Representa en cada recta numérica la expresión indicada.

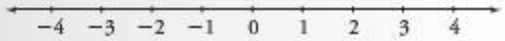
290. Todos los x menores que 6.



291. Todos los x mayores o iguales que -2.



292. Todos los x mayores que -3 y menores o iguales que 3.



Resuelve cada inecuación. Luego, escribe el intervalo solución.

293. $\frac{x}{2} + 3 > \frac{x}{3} + 4$

Intervalo solución: _____

294. $3x + 5\,(x - 2) \leqslant 2(x - 10)$

Intervalo solución: _____

Completa las inecuaciones para que el intervalo solución sea correcto.

295. $8x > 7x +$ _____ $(5, \infty)$

296. $6x < 4x -$ _____ $(-\infty, -4)$

297. $2x \geqslant -x -$ _____ $[-1, \infty)$

298. $\frac{x}{3} \leqslant$ _____ $(-\infty, -6]$

299. Calcula el valor de x para que se cumplan ambas inecuaciones.

$$\frac{x-1}{2} \leqslant 3x - 1 \text{ y } x + 1 \geqslant \frac{1 + 4x}{3}$$

Estos tres platillos están ordenados de forma decreciente.



300. ¿Dónde ubicarías el platillo? Justifica tu procedimiento.



_____

_____

_____

301. La tercera parte de cierto número entero disminuido en 6 es mayor que 22. La mitad del mismo número disminuida en 4 es menor que 40. ¿De qué número como máximo se trata?

302. Si $x - 2$, $2x$ y $x + 6$ son tres números positivos diferentes, y $x + 6$, es el mayor de ellos, determina cuál es el número menor.

Determina todos los valores m que hacen verdadera la desigualdad $a(m + 1) > m - 7$ para

303. $a < 1$: _____

304. $a = 1$: _____

305. $a > 1$: _____

PROBLEMAS PARA REPASAR

Una empresa determinó que el costo C (en dólares), para producir x número de artículos en un mes está dado por la fórmula $C(x) = 5.100 + 1.240x$, cuando $x \geq 85$. Además, el ingreso por la venta de estos artículos es $I(x) = 1.300x$. Si la ganancia en economía se define como la diferencia entre el ingreso y el costo de producir cierta cantidad de artículos:

¿Cuál es la ganancia de la empresa cuando se venden 280 artículos?

¿Cuántos artículos se deben producir y vender para que la ganancia sea mínimo de US$400.000?



Paso 1 Comprender el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es la ganancia de la empresa cuando se venden 280 artículos?, ¿cuántos artículos se deben producir y vender para que la ganancia sea mínimo de US$400.000?

¿Cuáles son los datos del problema?

El costo de producción de x artículos está dado por $C(x) = 5.100 + 1.240x$, cuando $x \geq 85$ y el ingreso es $I(x) = 1.300x$.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se plantea la ecuación de la ganancia $G(x)$. Para esto, se le resta al ingreso $I(x)$ el costo de producción $C(x)$. Así la ecuación es:

$G(x) = 1.300x - (5.100 + 1.240x)$

$G(x) = 60x - 5.100$

Luego, se remplaza $x = 280$, y se resuelve, de donde se obtiene que $G(280) = 11.700$.

Finalmente, se plantea una inecuación para determinar la cantidad de artículos que producen una ganancia mínima de US$400.000

$60x - 5.100 \geq 400.000$	Se plantea la inecuación.
$60x \geq 400.000 + 5.100$	Se transponen términos.
$60x \geq 405.100$	Se suma.
$\frac{60x}{60} \geq \frac{405.100}{60}$	Se divide entre 60 ambos miembros de la inecuación.
$x \geq 6.752$	Se divide y se redondea al entero más cercano.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que se hayan planteado correctamente la ecuación y la inecuación. Así, se obtiene que la ganancia de la empresa cuando se venden 280 artículos es de US$11.700. Además, para obtener una ganancia mínima de US$400.00 se deben producir y vender mínimo 6.752 artículos.

Responde las preguntas 306 y 307 de acuerdo con la siguiente situación.



La famosa playa de Acapulco (México) tiene x días de lluvia al año, y la ciudad de Nueva York tiene y días de lluvia al año. Si se sabe que:

$$\frac{x+1}{9} + x + 9 = 98$$

$$y - x = \frac{y}{3} + \frac{x}{40}$$

306. ¿Cuántos días menos llueve en Acapulco que en Nueva York?

307. ¿Cuál es la relación que existe entre los días lluviosos y no lluviosos en Acapulco?

308. Javier es vendedor y gana \$240.000 semanales más \$20.000 por cada venta. Esta semana quiere ganar \$480.000, ¿cuántas ventas tendrá que hacer?

309. En un gimnasio cobran \$5.000 por clase o una pensión mensual de \$170.000. ¿Cuántas veces como mínimo debe ir una persona a este gimnasio para que la pensión resulte más barata que pagar por clase?

310. Una varilla de 380 cm se divide en tres partes. Si la parte más larga mide 40 cm más que el doble de la parte más corta y la otra parte mide 140 cm menos que el triple de la parte más corta, ¿cuánto mide cada parte?



311. En un laboratorio se tienen dos sustancias, una con 30% de ácido sulfúrico y otra con 50% del mismo ácido. ¿Cuántos mililitros de cada sustancia se deben mezclar para formar 200 mL de una disolución que debe tener 42% de ácido sulfúrico?

312. Gloria necesita alquilar un apartamento en el exterior y tiene dos opciones para elegir: un apartamento en buen estado a US\$800 al mes, y otro apartamento cuyo alquiler cuesta US\$665 el mes, pero que necesita arreglos que costarán US\$4.050. Si Gloria elige la segunda opción, ¿por cuántos meses como mínimo tendría que hacer el contrato de alquiler para recuperar sus gastos por los trabajos realizados?



313. En la preparación de la parte activa de un medicamento se requieren dosis de tres sustancias A, B y C. La cantidad de la sustancia B es un 10% de la cantidad de la sustancia A y la cantidad de la sustancia C es un 2% de la cantidad de la sustancia B. ¿Cuántos miligramos de cada sustancia se requieren, como máximo, en la preparación del medicamento, si la cantidad total de la parte activa del medicamento no debe exceder los 5 mg?

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

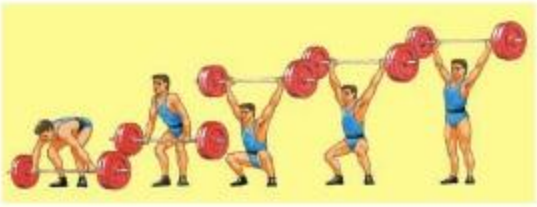
Galería de imágenes

...Para evaluar el rendimiento de un deportista en la halterofilia.

La halterofilia es el nombre que se le da al levantamiento de pesas. El deporte consiste en levantar una barra que está ligada a discos dispuestos en cada uno de sus extremos. El número de discos determina el peso final que levanta el deportista.

Las modalidades que existen en halterofilia son:

Arranque: cuando el deportista levanta la barra directamente encima de su cabeza y queda con el cuerpo erguido y los brazos totalmente estirados como se muestra en la siguiente imagen. En esta modalidad se toma la barra con los brazos más cerca a los discos para poder levantarla fácilmente.



Arranque

Envión: cuando el deportista levanta la barra en primera instancia a la altura de los hombros y después toma un impulso para quedar totalmente erguido con sus brazos extendidos sobre la cabeza como se indica en la imagen. En este caso como el ejercicio se hace en dos tiempos se toma la barra con los brazos más cerrados para desarrollar mejor la fuerza necesaria en el levantamiento.

Por medio de las matemáticas se puede encontrar la ecuación que relaciona el levantamiento en kilogramos que hace un deportista en cada una de las modalidades.



Envión

En un estudio realizado con 547 atletas entre los 15 y 16 años edad, se encontró que hay una relación entre las dos modalidades de halterofilia que no depende del peso del deportista. Las ecuaciones obtenidas son:

$$\text{Arranque estimado} = 4{,}78 + 0{,}76 \times \text{Envión}$$

$$\text{Envión estimado} = 4{,}41 + 1{,}20 \times \text{Arranque}$$

Gracias a estas dos ecuaciones se puede conocer el peso máximo que puede levantar cada deportista en cada una de las modalidades.

Por ejemplo, si un deportista levanta normalmente 110 kg en arranque y 170 kg en envión los valores obtenidos son:

$$\text{Arranque estimado} = 4{,}78 + 0{,}76 \times 170 \text{ kg} = 133{,}98 \text{ kg}$$

$$\text{Envión estimado} = 4{,}41 + 1{,}20 \times 110 \text{ kg} = 136{,}41 \text{ kg}$$

Lo anterior indica que el deportista tiene un buen rendimiento en envión, ya que logra levantar 170 kg, es decir, 33,59 kg más de lo estimado. Sin embargo, el deportista debe mejorar en arranque porque podría levantar un peso de 133,98 kg, es decir, 23,98 kg más de lo que levanta normalmente.

Es importante tener en cuenta que estas relaciones son válidas para deportistas que se inician en la halterofilia, ya que su validez no se ha comprobado para deportistas de otras categorías.

---

1. **¿Por qué es importante evaluar el rendimiento de los deportistas mediante expresiones matemáticas?**
2. **Expresa las ecuaciones de arranque y envión estimado con coeficientes racionales.**
3. **Si un deportista levanta 150 kg y 100 kg, en envión y en arranque respectivamente, ¿cuál es su rendimiento?**
4. **Averigua acerca de los récords nacionales que se encuentran vigentes para el levantamiento de pesas en estas dos modalidades en categorías juveniles.**

   Luego, calcula los pesos estimados que podría levantar cada deportista y escribe una conclusión al respecto.

Trabaja con Microsoft Mathematics

Objetivo: resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita.

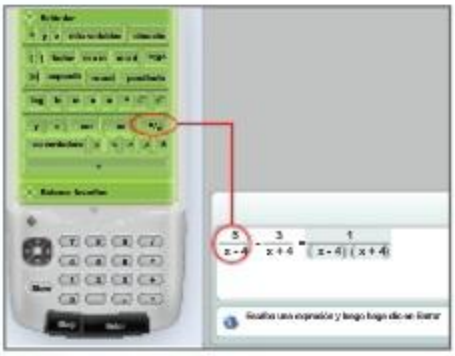
Descripción: escribir una ecuación de primer grado con una incógnita en Microsoft Mathematics que tenga fracciones algebraicas. Luego, comprobar su solución y resolver una inecuación.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en: www.microsoft.com/downloads/es-es/details.aspx?FamilyID=9caca722-5235-401c-8d3f-9e242b794c3a&displayland=es

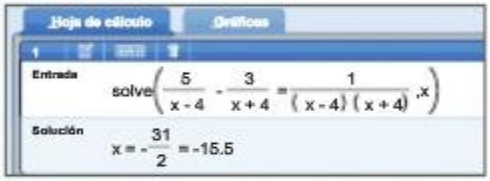
1. Haz clic en Microsoft Mathematics en el menú Inicio.

2. Despliega la calculadora en modo **Estándar** y escribe la siguiente ecuación utilizando la tecla **c/d** para las fracciones algebraicas.

$$\frac{5}{x-4} - \frac{3}{x+4} = \frac{1}{(x-4)(x+4)}$$



3. Oprime la tecla **Enter** y aparecerán dos cuadros, uno con la ecuación que se digitó y otro con su solución.



4. Resuelve las siguientes ecuaciones en tu cuaderno. Luego, comprueba tus respuestas resolviendo las ecuaciones en Microsoft Mathematics.

   a. $a - 4 = 3(5a + 8)$

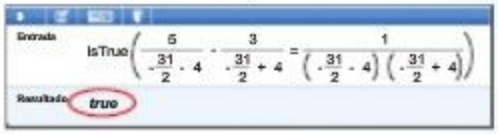
   b. $\frac{y-4}{3} - \frac{y-2}{4} = \frac{y}{2}$

   c. $\frac{2z-4}{5} + \frac{8+z}{3} = \frac{z}{6}$

5. Para comprobar que la solución de una ecuación sea la correcta digita el número que corresponde a la solución. Luego, haz clic en **almacén** y saldrá una flecha horizontal. Escribe la incógnita de la ecuación que va a tomar ese valor y oprime **Enter**. Aparecerá el valor asignado como se muestra a continuación.



6. Escribe nuevamente la ecuación de entrada y oprime **Enter**. Si en el cuadro ***Resultado*** aparece la palabra ***true*** significa que el valor de la incógnita sí es solución de la ecuación, de lo contrario, aparecerá la palabra ***false***.



7. Escribe **clear** (*x*) para borrar el valor asignado a la incógnita *x*.

8. También puedes resolver inecuaciones con Microsoft Mathematics, utilizando los signos de las desigualdades que aparecen en la parte inferior del menú **Estándar**.



9. Resuelve $2x - 4(3 + 6x) < 3(5x - 8)$.



8 Función lineal

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Comprender qué es una **función y cuáles son sus elementos**.
- **Representar funciones** de diferentes formas.
- Hallar la **ecuación de una recta** a partir de sus elementos.
- Determinar la **ecuación de la recta perpendicular o paralela a una recta dada**.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba TIMS

5 Multimedia **1** Audio

1 Galería **6** Imprimibles

7 Actividades **1** Enlace web

Lo que sabes...

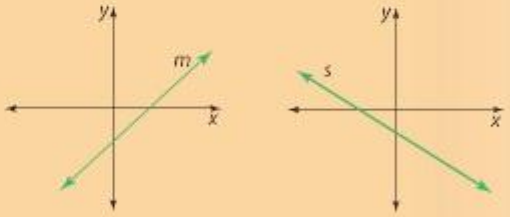
1. Representa los siguientes puntos en el plano cartesiano.

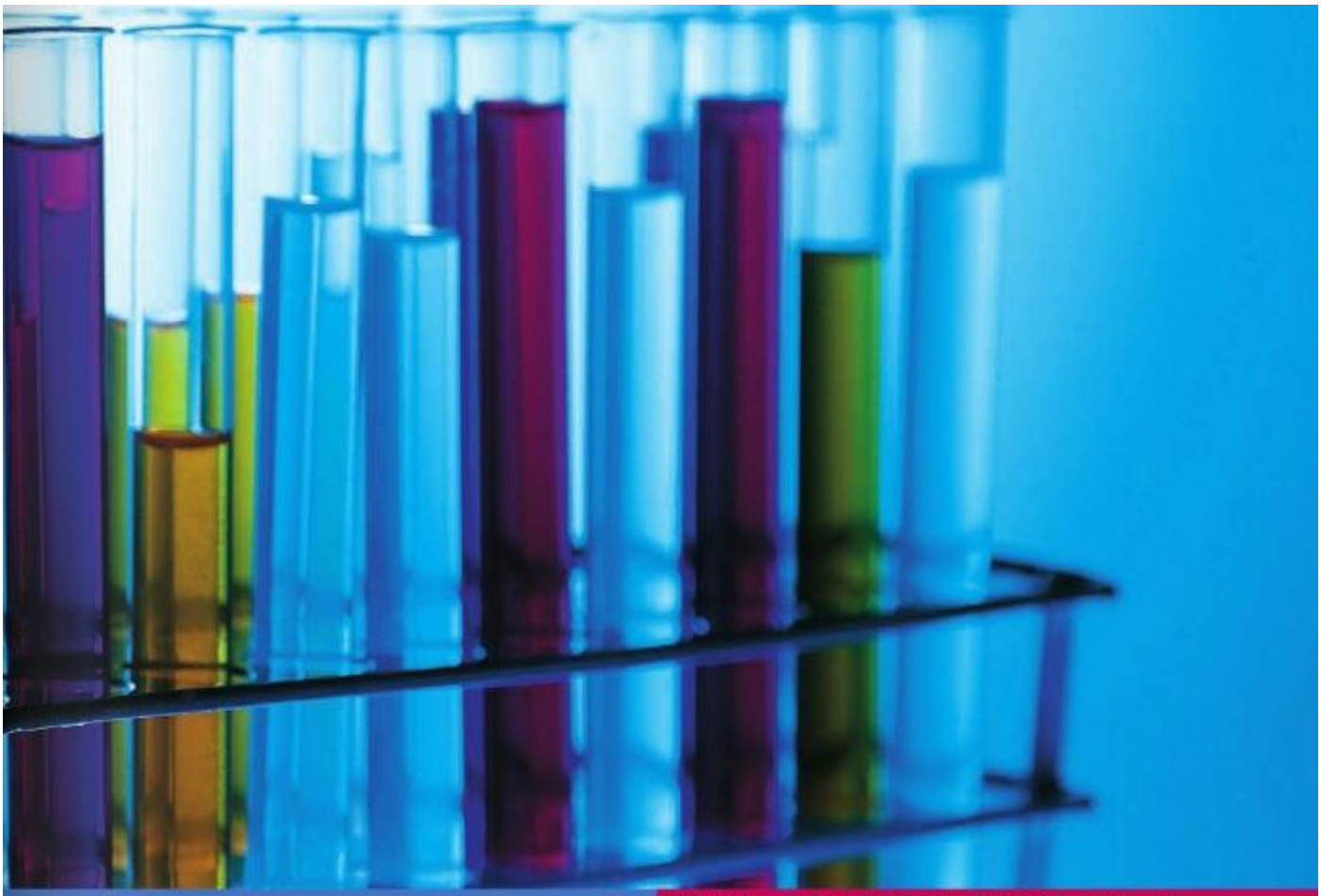
   a. (1, 2) c. (−1, 1) e. (−2, 3)

   b. (3, 4) d. (−4, −2) f. (4, −4)

2. Traza la recta que se indica en cada plano.

   a. Perpendicular a *m*. b. Paralela a *s*.





Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para determinar la concentración de una sustancia química.

La espectrofotometría es una técnica que permite medir la concentración de una sustancia química por medio de la luz. Esta técnica consiste en emitir luz a un cuerpo, de tal forma que sea absorbida por sus electrones libres para observar la reacción que tienen.

Lee más acerca de este tema en la página 252.

Cronología de la función lineal



Grecia. Euclides estudió las propiedades de las rectas en su obra los *Elementos*.

Italia. Galileo Galilei desarrolló funciones para descubrir el movimiento de los cuerpos.



330 a. C.

1604 d. C.

Alemania. Leibniz utilizó por primera vez el término función para hacer referencia a la relación entre dos magnitudes.

Francia. Se publicó el *Discurso del método* de René Descartes, en el que se comienzan a representar rectas y otras figuras en el plano cartesiano.

1637 d. C.

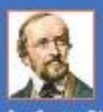
1692 d. C.

1734 d. C.

Suiza. Leonhard Euler introdujo la notación *f(x)* para indicar una relación funcional.

1835 d. C.

República Checa. Bernard Bolzano analizó a profundidad las características básicas de una función continua.



1837 d. C.

Alemania. Gustav Dirichlet creó la definición formal del concepto de función que se conoce actualmente.

1. Función

Ampliación multimedia

Actividad

Las funciones tienen aplicaciones en varias ciencias como física, química, economía y sociología, entre otras.

Por ejemplo, en física se utilizan las funciones para determinar la altura de un objeto que describe una trayectoria parabólica y para calcular la energía cinética de un cuerpo en movimiento.

Actividad

Una **función** es una relación entre dos conjuntos X y Y, en la que a todo elemento del conjunto X le corresponde un único elemento del conjunto Y.

Así, una función definida del conjunto X en el conjunto Y se simboliza $f: X \to Y$, donde X se denomina **conjunto de partida** y Y **conjunto de llegada**.

Además, si los elementos b y m se relacionan mediante la función f, de tal forma que $b \in X$ y $m \in Y$, entonces, m es la **imagen** de b y se escribe $f(b) = m$ que se lee "f de b igual a m".

Una función f se puede representar con un diagrama sagital, una tabla de valores, una gráfica o una expresión algebraica.

Por ejemplo, la función cuya expresión algebraica es $f(x) = 2x$ con $x \in \mathbb{N}$ se puede representar así:

Diagrama sagital

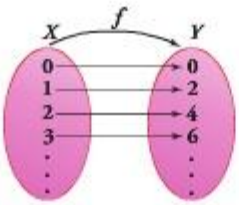
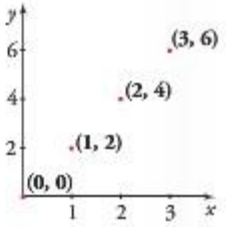


Tabla de valores

x	$y = f(x)$
0	0
1	2
2	4
3	6
.	.
.	.
.	.

Gráfica



Historia de las matemáticas

El término función y su notación

El primer matemático que utilizó la palabra función, e introdujo los términos variable y constante, fue el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716). Sin embargo, fue el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) quien introdujo la notación $f(x)$ para representar funciones.



Recursos imprimibles

1.1 Elementos de una función

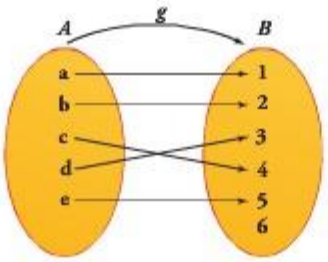
Los elementos de una función son:

- **Dominio:** es el conjunto de partida de la función, se escribe Dom f.
- **Codominio:** es el conjunto de llegada de la función, se escribe Cod f.
- **Rango:** es el conjunto formado por los elementos del codominio que son imagen de los elementos del dominio, se escribe Ran f.
- **Grafo:** es el conjunto de parejas ordenadas que pertenecen a la función, se escribe Grafo f.

Es importante tener en cuenta que en algunas funciones el codominio es igual al rango y en otras funciones es diferente.

EJEMPLOS

1. Determinar los elementos de la función que se representa en el siguiente diagrama sagital.



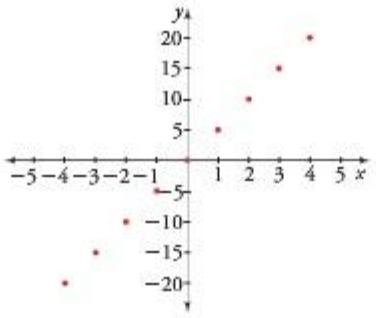
Los elementos de la función $g: A \to B$ son:

- Dom $g = \{a, b, c, d, e\}$
- Cod $g = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Ran $g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Grafo $g = \{(a, 1), (b, 2), (c, 4), (d, 3), (e, 5)\}$

2. Realizar la representación gráfica de la función a partir de la tabla de valores, si x, y son enteros. Luego, determinar sus elementos.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20

Si f es la función que se representa en la tabla, entonces, $y = f(x) = 5x$ es la expresión algebraica de la función, en donde $x \in \mathbb{Z}$. Así la gráfica de la función es:



Luego los elementos de la función son:

Dom $f = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ran $f = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$

Grafo $f = \{\ldots, (-3, -15), (-2, -10), (-1, -5), (0, 0), (1, 5), (2, 10), \ldots\}$

En este caso, si se considera que el conjunto de llegada de la función f es el conjunto de los múltiplos enteros de 5, entonces el rango es igual al codominio pero, si el conjunto de llegada es $\mathbb{R}$, entonces Ran f es un subconjunto de Cod f.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Modelo · Razono · Soluciono problemas

Responde.

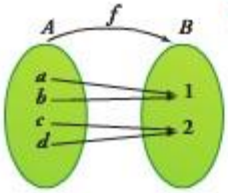
1. ¿Qué es una función?
2. ¿Cuáles son los tipos de representación de una función?
3. ¿En qué se diferencia el codominio y el rango de una función?

Determina el dominio y el rango de cada función a partir de su grafo.

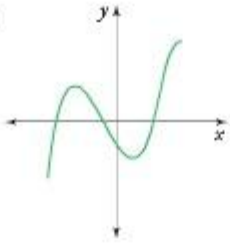
4. Grafo $f = \{(a, 1), (e, 2), (i, 3), (o, 4), (u, 5)\}$
5. Grafo $g = \{(-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2)\}$
6. Grafo $h = \left\{\ldots, \left(-1, -\frac{1}{2}\right), (0, 0), \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1), \ldots\right\}$

Determina si cada representación corresponde o no corresponde a una función. Justifica tu respuesta.

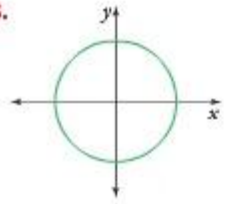
7.



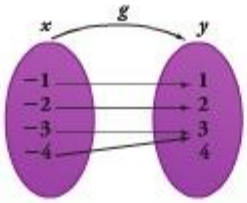
9.



8.



10.



Representa cada situación como una función en forma algebraica.

11. El costo C de una cantidad x de artículos cuyo precio unitario es US$5.
12. La distancia d que recorre un móvil en un tiempo t, si su velocidad es de 10 km/h.

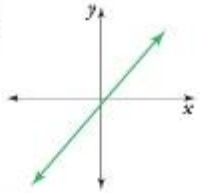
Observa el grafo de una función f. Luego, resuelve.

Grafo $f = \{(1, 1.000), (2, 2.000), \ldots\}$

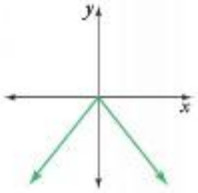
13. Escribe una situación real acorde con el grafo de la función f.
14. Determina Dom f y Ran f.

Determina el dominio y el rango de cada función a partir de su representación gráfica.

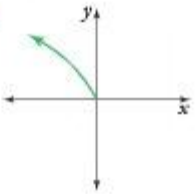
15.



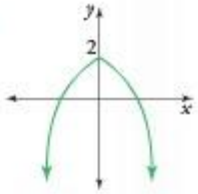
17.



16.



18.



Halla el dominio y el rango de las siguientes funciones. Justifica tu respuesta.

19. $y = x$
20. $f(x) = x^2$
21. $y = \sqrt{x}$
22. $g(x) = \frac{1}{x}$

Halla el dominio de la función f en cada caso.

23. Ran $f = \left\{-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$ y $f(x) = \frac{1}{3x}$
24. Ran $f = \{0, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}\}$ y $f(x) = \sqrt{x + 1}$

Lee y resuelve.

En un laboratorio cierta sustancia química tiene una temperatura inicial de −15 °C, a partir de la cual aumenta 3 °C por minuto.



25. Halla una expresión algebraica que represente la temperatura T resultante, pasados m minutos.
26. Determina el dominio y el rango de la función $T(m)$.
27. Completa la siguiente tabla de valores.

Minutos	1	2	3	4	5
Temperatura					

1.2 Variables dependientes e independientes

Actividad

A partir de la definición de función y de sus tipos de representación, se puede observar que en una función se establece una relación entre dos magnitudes, de tal forma, que una de ellas se modifica dependiendo de la otra. Así, en una función existen dos tipos de variables: la **variable dependiente** y la **variable independiente**.

Por ejemplo, en la función $P(x) = 3.000x$, donde P es la función del costo de producción de x artículos, se tiene que x es la variable independiente y P la variable dependiente, ya que el costo depende de la cantidad de artículos que se produzcan.

EJEMPLOS

1. Determinar las variables independiente y dependiente de la función cuyos valores se muestran en la siguiente tabla. Luego, hallar su expresión algebraica.

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	6	7	8
Distancia (km)	10	20	30	40	50	60	70	80

Primero, se tiene que la distancia recorrida depende del tiempo que transcurre. Por esto, la variable independiente es el tiempo y la dependiente es la distancia.

Luego, se tiene que el cociente entre cada distancia d y su tiempo correspondiente t es igual a 10.

Finalmente, como $d = vt$, donde d es la distancia, v la velocidad y t el tiempo, entonces, la expresión algebraica es $d = 10t$.

2. El precio P de un curso de inglés es $450.000 por mes más $120.000 por concepto de matrícula.

a. Determinar las variables dependiente y la independiente.

En este caso el costo P depende del tiempo t en meses que dure el curso. Por esto, P es la variable dependiente y t es la variable independiente.

b. Hallar una expresión algebraica para $P(t)$.

Si t es la cantidad de meses, entonces, el costo P está dado por la expresión:

$P(t) = 450.000t + 120.000$.

c. Determinar el dominio y el rango de la función $P(t)$.

El dominio es la cantidad de meses t y el rango depende del valor mínimo que debe pagar un cliente por el curso.

Así el dominio y el rango de la función son:

Dom $f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Ran $f = \{120.000, 570.000, 1.020.000, \ldots\}$

d. Calcular el precio que debe pagar un estudiante por un nivel de inglés que dura tres meses.

Si se remplaza $t = 3$, se obtiene que:

$$P(3) = 450.000(3) + 120.000 = 1.470.000$$

Matemáticamente

Halla la expresión algebraica que representa la siguiente situación y determina las variables dependiente e independiente.

"El impuesto por la venta de un artículo es de 16% del precio del artículo".

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Determina cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente en cada caso.

28. La distancia d recorrida en un tiempo determinado t.

29. La presión P de un gas de volumen V, a temperatura constante x.

Completa cada tabla de valores.

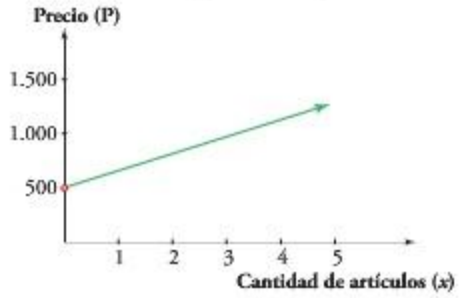
30. $y = -\frac{1}{3}x$

x	-1	-2	0	1	2	3	4
y							

31. $a = -2b + 7$

b	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
a							

Observa la siguiente gráfica. Luego, resuelve.



32. Determina cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente.

33. Escribe el dominio y el rango.

Observa la siguiente tabla de valores. Luego, resuelve.

Tiempo (*días*)	30	60	90	120	150
Altura (*cm*)	4,5	9	13,5	18	22,5

34. Propón una situación problema que se relacione con la tabla de valores.

35. Determina las variables dependiente e independiente.

36. Halla la expresión algebraica.

El precio de un metro cuadrado de baldosa es de $24.000.

37. Completa la siguiente tabla de valores.

Cantidad de baldosas (m^2)	Precio ($)
3	
6	
9	
12	

38. Determina cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

39. Halla la expresión algebraica que relaciona la cantidad C de baldosas y el precio P.

40. Traza la gráfica de la función.

Un vendedor de electrodomésticos tiene un salario básico de $580.000 y una comisión de 20.000 por cada electrodoméstico que venda.



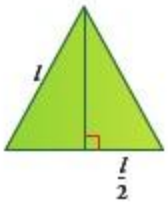
41. Escribe cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente.

42. Completa la siguiente tabla de valores.

Número de electrodomésticos	1	2	3	4
Salario total				

43. Halla una expresión algebraica para calcular el salario del vendedor en función del número de electrodomésticos que venda.

44. Demuestra que la función que relaciona el área A de un triángulo equilátero como el que se muestra en la siguiente figura, con la medida de su lado l, está dada por la expresión $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.



1.3 Función lineal y función afín

Recurso imprimible Ampliación multimedia

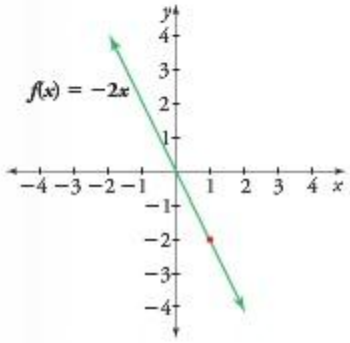
Una función lineal y una función afín tienen como representación en el plano cartesiano una recta.

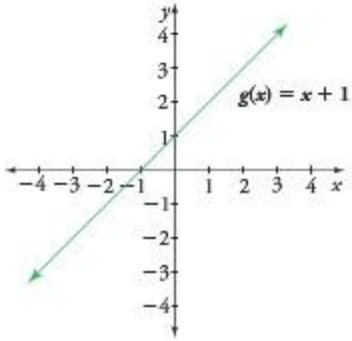
Una **función lineal** es una función de la forma $y = mx$, donde m es un número real.

Una **función afín** es una función de la forma $y = mx + b$, donde m y b son números reales diferentes de cero.

Gráficamente, la diferencia entre una función lineal y una función afín es que la recta que representa una función lineal pasa por el punto (0, 0). En cambio, la recta que representa una función afín no pasa por este punto.

Por ejemplo, la función $f(x) = -2x$ es una función lineal y la función $g(x) = x + 1$ es una función afín. Luego, la representación gráfica de cada una es:





Matemáticamente

¿Cuál es el dominio y el rango de una función lineal?

EJEMPLOS

1. Determinar si cada función es lineal o afín, de acuerdo con su expresión algebraica.

a. $y = \frac{2}{3}x - 4$

Como la función es de la forma $y = mx + b$ donde $m = \frac{2}{3}$ y $b = -4$, entonces la función es afín.

b. $y = \sqrt{3}x$

Como la función es de la forma $y = mx$ donde $m = \sqrt{3}$, entonces la función es lineal.

2. Realizar la tabla de valores correspondiente a la función $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Luego, determinar si la función es lineal o afín.

Para hacer la tabla de valores se remplazan diferentes valores de x en la función y se efectúan las operaciones. Por tanto, se tiene que:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$

Como $m = -\frac{1}{2}$ y $b = 3$, entonces la función es afín.

3. La temperatura de un lugar es de 5 °C al mediodía y después desciende 4 °C cada hora.



a. Realizar una tabla de valores tomando $t = 0$ como el mediodía.

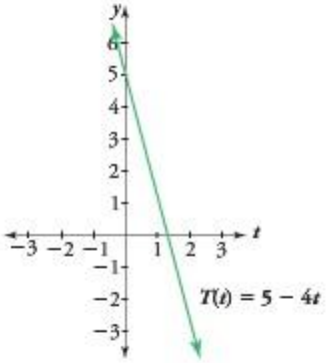
Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	5	1	−3	−7	−11	−15

b. Hallar la expresión algebraica que representa la función.

Si t es el tiempo en horas, entonces, la temperatura $T(t)$ está dada por la expresión $T(t) = 5 - 4t$.

c. Determinar si la función es lineal o afín. Luego, traza la gráfica.

Como la función es de la forma $y = mt + b$, donde $m = -4$ y $b = 5$, entonces, la función es afín y su gráfica es una recta que interseca al eje y en (0, 5), como se muestra a continuación.



4. En una entidad bancaria ofrecen un interés del 5% anual aplicable al monto fijo que se mantenga en una cuenta de ahorros. Si la tasa del 5% se aplica solo al monto inicial:

a. Calcular el interés acumulado que genera un monto de $560.000 en 4 años.

Primero, se tiene que el interés acumulado es el producto del capital inicial, la tasa de interés y el tiempo t.

Luego, se tiene que la función del interés acumulado es:

$$I(t) = 560.000 \cdot \frac{5}{100} \cdot t$$

Finalmente, se remplaza $t = 4$ y se realizan las operaciones.

$$I(t) = 560.000 \cdot \frac{5}{100} \cdot 4 = 112.000$$

Por tanto, el interés acumulado es $112.000.

b. Determinar el tipo de función que representa el interés acumulado.

Como la función $I(t)$ es de la forma $y = mt$ con $m = 560.000\left(\frac{5}{100}\right) = 28.000$, entonces, la función es lineal.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

45. ¿Cuál es la diferencia entre una función lineal y una función afín?

46. Si f es una función lineal y la gráfica de g es una recta paralela a la recta que representa f, ¿que tipo de función es g?

Determina cuáles de las siguientes funciones son lineales y cuáles, afines.

47. $y = -\frac{1}{3}x$

48. $f(x) = 5x - 2$

49. $g(x) = -3 - x$

50. $h(x) = \frac{x}{4}$

51. $y = -\frac{2}{5}x + 1$

52. $y = -5 + x$

53. $f(x) = \sqrt{5}x$

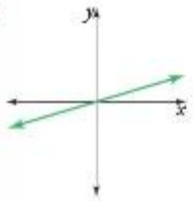
54. $g(x) = 75x$

55. $h(x) = -9 - x$

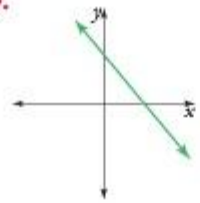
56. $y = 8$

Clasifica cada función en lineal o afín a partir de su gráfica.

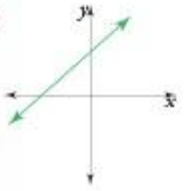
57.



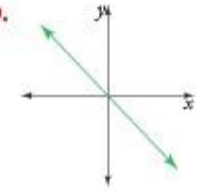
59.



58.



60.



Elabora una tabla de valores para cada una de las siguientes funciones.

61. $y = 5x$

62. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

63. $y = -6x$

64. $y = 3x - 4$

65. $y = \frac{1}{3}x + 4$

66. $y = 7x + \frac{1}{4}$

67. $y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}$

68. $y = 2x + 1$

69. $y = -\frac{1}{4}x$

70. $y = -6 + x$

71. $y = -2x + 3$

72. $y = -\frac{7}{3}x + 2$

73. $y = -\frac{9}{5}x - 3$

74. $y = 4 + \frac{1}{3}x$

Traza la gráfica de cada función.

75. $f(x) = -x$

76. $f(x) = -\frac{1}{3}x$

77. $y = -x - 1$

78. $f(x) = -4x$

79. $f(x) = -\frac{1}{4}x + 2$

80. $y = -4x + 3$

Determina si la función es lineal o afín a partir de cada tabla de valores. Luego, traza la gráfica.

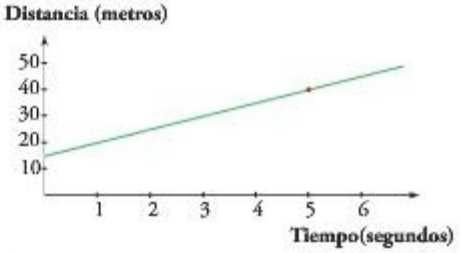
81.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

82.

x	-4	-2	0	2	4	6
y	-1	1	3	5	7	9

Un móvil parte de un punto y se mueve con velocidad constante. La relación entre el tiempo y la distancia recorrida se representa en la siguiente gráfica.



83. ¿A qué distancia se encontraba el móvil en $t = 0$?

84. ¿Cuál es la velocidad del móvil? (Ten en cuenta que la velocidad v esta dada por $v = \frac{d}{t}$, donde d es la distancia y t es el tiempo.)

85. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la función mostrada en la gráfica?

86. ¿En qué momento el móvil estará a 80 metros del punto 0?

Para determinar la temperatura T_F en grados Farenheit (°F) a partir de la temperatura T_C en grados centígrados (°C), se utiliza la expresión $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$.

87. Clasifica la función para convertir grados centígrados a Farenheit en lineal o afín.

88. Traza la gráfica de la función.

2. La recta

Actividad

La gráfica de la función lineal y de la función afín son rectas. En una recta se puede determinar su grado de inclinación y su ecuación.

2.1 Pendiente de una recta

La **pendiente** de una recta es la razón entre la variación vertical y la variación horizontal entre cualquier par de puntos de la recta. La pendiente determina el grado de inclinación de la recta.

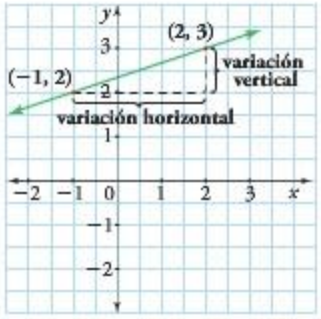
Recuerda que...
Si (x, y) son las coordenadas de un punto P, entonces, x es la abscisa y y la ordenada.

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos distintos de una recta, entonces la pendiente m de una recta está dada por la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ con } x_1 \neq x_2$$

Por ejemplo, para calcular la pendiente de una recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 3)$ se tiene que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

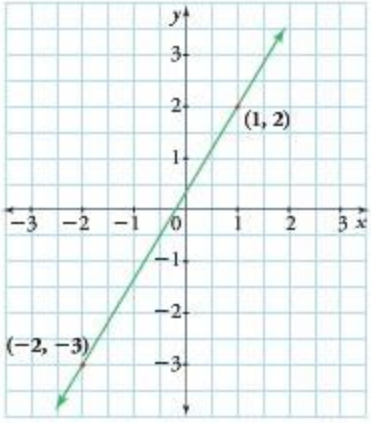


Así, la variación vertical corresponde a la diferencia entre las ordenadas de ambos puntos y la variación horizontal a la diferencia entre las abscisas. Por lo cual, la razón entre la variación vertical y la variación horizontal es la pendiente.

La pendiente de una recta puede ser **positiva** o **negativa**. Si el valor de y aumenta cuando el valor de x aumenta, entonces la pendiente de la recta es positiva. En cambio, si el valor de y disminuye cuando el valor de x aumenta, la pendiente es negativa.

EJEMPLO

Trazar la recta que pasa por $P_1(-2, -3)$ y $P_2(1, 2)$. Luego, determinar si su pendiente es positiva o negativa y calcularla.



Primero, se ubican los puntos $P_1(-2, -3)$ y $P_2(1, 2)$ en el plano cartesiano y se traza la recta, como se muestra en la gráfica.

Luego, se tiene que la pendiente de la recta es positiva porque cuando el valor de x aumenta el valor de y también aumenta.

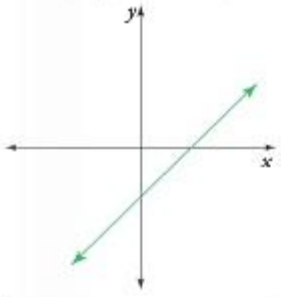
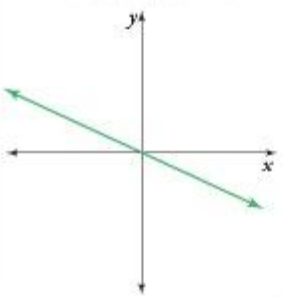
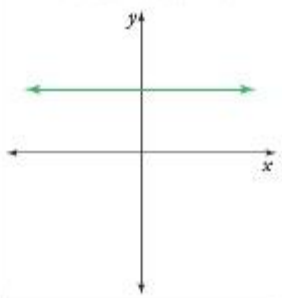
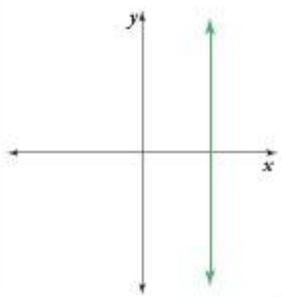
Finalmente, se calcula la pendiente. Como $x_2 = 1$, $x_1 = -2$, $y_2 = 2$ y $y_1 = -3$, entonces se tiene que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-3)}{1 - (-2)} = \frac{5}{3}$$

Matemáticamente
¿Por qué la pendiente de una recta vertical es indefinida?

Clasificación de las rectas según su pendiente

Las rectas se clasifican según su pendiente en crecientes, decrecientes, horizontales y verticales.

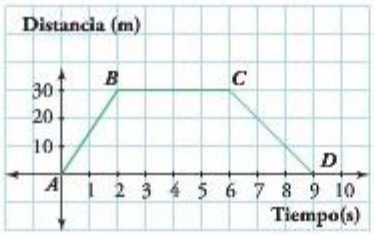
Creciente	Decreciente	Horizontal	Vertical
Pendiente: $m > 0$	Pendiente: $m < 0$	Pendiente: $m = 0$	Pendiente: indefinida
			

Por tanto, se tiene que una recta con pendiente positiva es creciente y una recta con pendiente negativa es decreciente.

EJEMPLOS

La siguiente gráfica representa la distancia recorrida por un móvil en determinado tiempo.

a. Clasificar cada segmento de recta del recorrido en creciente, decreciente, horizontal o vertical.



El segmento AB es creciente porque su pendiente es positiva. En cambio, el segmento CD es decreciente porque su pendiente es negativa.

En el caso del segmento BC, se tiene que es horizontal porque su pendiente es igual a cero.

b. Calcular la velocidad del móvil de los 6 a los 9 segundos.

Primero, la velocidad es la variación de la distancia en función del tiempo, por esto, la pendiente de la recta CD corresponde a la velocidad del móvil de los 6 a los 9 segundos.

Luego, se remplazan las coordenadas de C y de D para hallar la velocidad:

$$v = \frac{30 - 0}{6 - 9} = \frac{30}{-3} = -10.$$

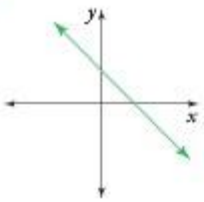
Finalmente, la velocidad del móvil de los 6 a los 9 segundos es de -10 m/s.

Afianzo COMPETENCIAS

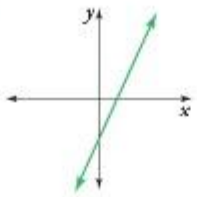
Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Clasifica las siguientes rectas en creciente, decreciente, horizontal o vertical.

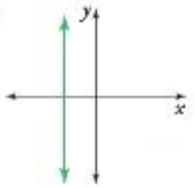
89.



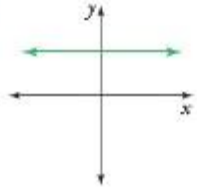
91.



90.



92.



Calcula la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos.

93. (1, 2) y (−1, 0)

94. (3, −3) y (−2, 1)

95. $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ y $\left(-\frac{2}{5}, -3\right)$

96. $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ y (4, −4)

97. (−9, 7) y (9, −7)

98. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y (4, 5)

99. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\right)$ y (1, 2)

100. (−8, −6) y (4, 3)

101. (−7, 5) y (−5, 8)

102. $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$ y $\left(\frac{2}{7}, 9\right)$

103. $\left(\frac{2}{5}, -6\right)$ y $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

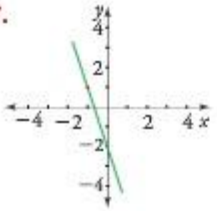
104. (2, 8) y (−1, 3)

105. $\left(\frac{1}{9}, -\frac{2}{5}\right)$ y (0, −1)

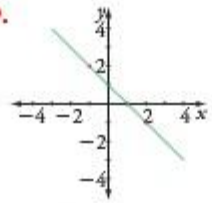
106. $\left(-\frac{2}{7}, \frac{1}{3}\right)$ y (3, 0)

Halla la pendiente de cada recta.

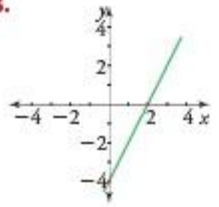
107.



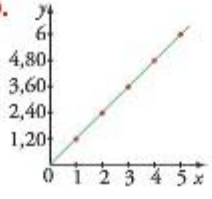
109.



108.



110.



Resuelve.

111. Traza una recta creciente y otra decreciente que se intersequen en un punto. Luego, calcula sus pendientes.

112. Traza dos rectas decrecientes, una que pase por (−4, 0) y otra que pase por (3, 0). Luego, halla la suma de sus pendientes.

113. Traza una recta horizontal y una creciente. Luego, calcula sus pendientes.

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

114. La pendiente de la recta $x = 0$ es indefinida.

115. Todas las rectas crecientes tienen pendiente positiva.

116. Algunas rectas decrecientes tienen pendiente positiva.

117. La pendiente de la recta $y = 75$ es igual a cero.

La temperatura inicial en un frigorífico es de 10 °C y disminuye a razón de 3 °C cada 5 minutos.



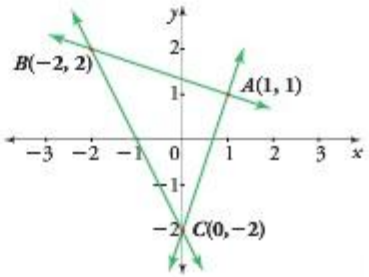
118. Completa la siguiente tabla de valores.

Minutos	0	5	10	15	20
°C					

119. Realiza la gráfica de la recta que representa la variación de la temperatura en función del tiempo.

120. Halla la pendiente de la recta a partir de dos puntos.

121. Calcula la pendiente de cada una de las rectas que forman el siguiente triángulo.



2.2 Ecuación de la recta

Actividad Enlace web

La **ecuación explícita** de la recta es $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y.

La ecuación de una recta se puede hallar a partir de la pendiente y del intercepto con el eje y, de un punto y la pendiente o de dos puntos.

Ecuación de la recta dados la pendiente y el intercepto con el eje y

Para hallar la ecuación de la recta a partir de la pendiente y del intercepto con el eje y, se remplazan el valor de m y el valor de b en la ecuación explícita $y = mx + b$. Por ejemplo, la ecuación de la recta con pendiente $m = -3$ e intercepto con el eje y $(0, 4)$ es $y = -3x + 4$, donde $b = 4$.

EJEMPLOS

1. Una empresa de mensajería cobra $1.500 por kilómetro recorrido más $900 por paquete o maleta.



a. Realizar una tabla de valores cuando un cliente paga por el transporte de una maleta.

Para realizar la tabla de valores se multiplica 1.500 por la cantidad de kilómetros recorridos y se suma 900. Por tanto, la tabla de valores correspondientes es:

Distancia (km)	50	100	150	200	250	300
Precio ($)	75.900	150.900	225.900	300.900	375.900	450.900

b. Hallar la expresión que permite calcular el precio P para transportar dos maletas.

Como la empresa cobra $1.800 por el transporte de dos maletas, entonces si x es la cantidad de kilómetros recorridos, la expresión que permite calcular el precio P es: $P = 1.500x + 1.800$ donde 1.500 es la pendiente de la recta que representa y 1.800 es el intercepto con el eje y.

2. El interés simple se calcula mediante la fórmula $I = prt$, donde p es el capital, r la tasa de interés y t el tiempo. Trazar la gráfica del interés en función del tiempo, luego, determinar la pendiente de la recta y su intercepto con el eje y, si $p = 100.000$ y $r = 5\%$.

Primero, se remplazan $p = 100.000$ y $r = 0{,}05$ en la fórmula del interés simple.

$I = (100.000)(0{,}05)t$

$I = 5.000t$

Luego, si $t = 0$, entonces, $I = 0$ y si $t = 1$, entonces $I = 5.000$. Así la recta pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 5.000)$.

Finalmente, se tiene que la pendiente es $m = 5.000$ y el intercepto con el eje y es $y = 0$. La gráfica se observa en la figura 1.

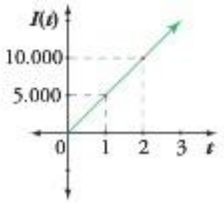


Figura 1.

3. El costo C de jugar en un club de golf es de \$45.000 el mes, más \$2.000 por hora.



a. ¿Cuál es la pendiente y el intercepto con el eje y de la recta que representa la función del costo con respecto al tiempo?

En este caso la cuota fija mensual representa el intercepto con el eje y, es decir, \$45.000. Por otra parte, la pendiente m corresponde al valor por hora, por esto $m = 2.000$.

b. Hallar la ecuación de la recta para el costo en función del tiempo.

Como la pendiente es $m = 2.000$ y el intercepto con el eje y es $b = 45.000$, entonces, la ecuación de la recta es: $C(t) = 2.000t + 45.000$, donde t es el tiempo en horas.

c. Trazar la gráfica de la recta.

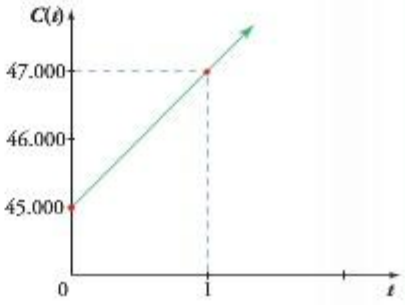
Primero, se remplazan $t = 0$ y $t = 1$ en la ecuación $C(t) = 2.000t + 45.000$.

$C(0) = 2.000(0) + 45.000 = 45.000$

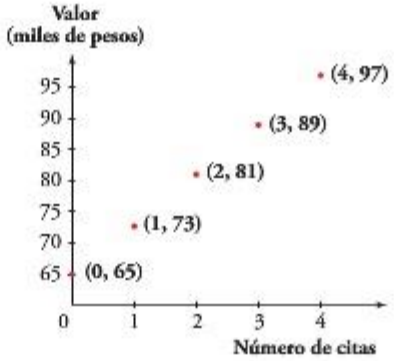
$C(1) = 2.000(1) + 45.000 = 47.000$

Luego, la recta pasa por (0, 45.000) y por (1, 47.000).

Finalmente, se traza la recta como se muestra en la gráfica.



4. La siguiente gráfica representa el valor que debe pagar un paciente afiliado a cierta EPS, si paga una cuota fija mensual y una cuota moderadora por cada cita.



Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos de la gráfica.

Primero, se tiene que el intercepto con el eje y es el punto (0, 65), y como los valores en el eje y, están en miles de pesos, entonces $b = 65.000$.

Luego, se remplazan las coordenadas de (0, 65) y (1, 73) en la expresión para calcular la pendiente de la recta.

$$m = \frac{73 - 65}{1 - 0} = 8$$

Finalmente, se tiene que $m = 8.000$, de donde la ecuación de la recta es:

$y = 8.000x + 65.000$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Identifica la pendiente y el intercepto con el eje *y* en la ecuación de cada recta, si *x* y *y* son las variables.

122. $y = 5 - 3x$

123. $y = 7x + 4$

124. $-9x = y - 3$

125. $10 = 8x - y$

126. $y = mx - b$

127. $y = d - ax$

128. $cx = e + y$

129. $z = -y - x$

Escribe la ecuación explícita de cada recta a partir de su pendiente *m* y de su intercepto *b* con el eje *y*.

130. $m = 1$ y $b = 0$

131. $m = 2$ y $b = -3$

132. $m = -2$ y $b = 4$

133. $m = -5$ y $b = -1$

134. $m = -3$ y $b = -2$

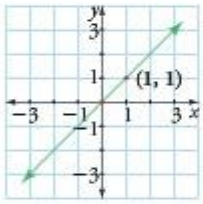
135. $m = 4$ y $b = -7$

136. $m = 12$ y $b = -8$

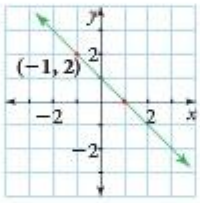
137. $m = 17$ y $b = 10$

Determina la ecuación de cada recta a partir de su pendiente y de su intercepto con el eje *y*.

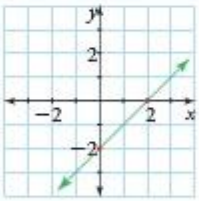
138.



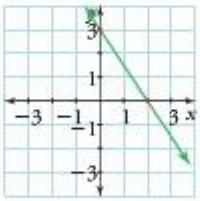
140.



139.



141.



Determina si cada proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

142. Todas las rectas cuyas pendientes son positivas, intersecan al eje *y* en un punto $(0, b)$ donde $b \geq 0$.

143. Si la ecuación explícita de una recta es $y = b$, entonces interseca al eje *y* en *b* y su pendiente es igual a cero.

144. Todas las rectas cuya ecuación es $x = c$ con $c \in \mathbb{R}$, tienen pendiente indefinida.

145. Si una recta con pendiente *m* tal que $0 < m < 1$ interseca al eje *y* en un punto $(0, b)$, entonces, $b < 0$.

Explica paso a paso cómo hallar la ecuación explícita de cada recta. Luego, determina su pendiente y su intercepto con el eje *y*.

146. $3y = 5x - 4$

147. $2y = 4x - 8$

148. $4y = -8x - 16$

149. $11x = y - 22$

150. Escribe la ecuación de una recta con pendiente *m* tal que $-1 < m < 0$ y cuyo intercepto con el eje *y* sea $b = -4$. Luego, traza su gráfica.

Escribe la ecuación de una recta que cumpla cada condición. Luego, traza su gráfica.

151. Pendiente negativa e intercepto con el eje *y* positivo.

152. Pendiente igual a cero y punto de intersección con eje *y* $(0, b)$, tal que $-2 < b < -1$.

153. Pendiente *m* tal que $1 < m < 2$ e intercepto *b* con el eje *y* mayor que cero.

Rodrigo quiere organizar una fiesta y cuenta con dos empresas de eventos. Cada empresa tiene las siguientes tarifas para el alquiler del salón y para el menú por persona.



Empresa	Salón	Menú
A	\$600.000	\$10.000
B	\$500.000	\$15.000

154. Escribe la ecuación de la recta que representa las tarifas de la empresa *A*, y de la recta que representa las tarifas de la empresa *B*.

155. Traza la gráfica de ambas rectas y determina su punto de intersección.

156. Determina cuál empresa es más conveniente para Rodrigo si desea invitar a 80 personas.

En un curso de baile cobran \$60.000 la inscripción y \$30.000 la hora.

157. ¿Cuál es la ecuación de la recta que relaciona la cantidad *t* de horas con el costo del curso?

158. ¿Cuánto debe pagar una persona por 15 horas de clase?

Recurso imprimible

Ecuación de la recta dados un punto y la pendiente

Para hallar la ecuación de una recta a partir de uno de sus puntos $P(x, y)$ y de su pendiente m, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se remplazan las coordenadas (x, y) del punto P en la ecuación explícita de la recta $y = mx + b$.

Luego, se remplaza la pendiente m.

Finalmente, se despeja b y se escribe la ecuación con el valor de la pendiente y del intercepto con el eje y.

EJEMPLOS

1. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -2 y que pasa por el punto $P(1, 3)$.

Primero, se remplazan las coordenadas de P en la ecuación explícita de la recta.

$$y = mx + b$$
$$3 = m(1) + b$$

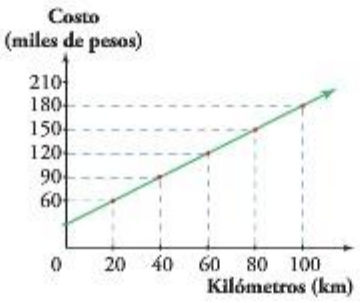
Luego, se remplaza la pendiente m.

$$3 = (-2)(1) + b; \qquad 3 = -2 + b$$

Finalmente, se despeja b. Así, $b = 5$. Por tanto, la ecuación de la recta es $y = -2x + 5$.

2. La gráfica representa el costo del alquiler de un autobús, según la cantidad de kilómetros que recorra.

Hallar la ecuación de la recta.





Primero, se seleccionan dos puntos de la recta, tales como (20, 60) y (40, 90).

Luego, se remplazan las coordenadas de ambos puntos para calcular la pendiente m.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{90 - 60}{40 - 20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

Finalmente, se remplazan la pendiente y las coordenadas de un punto en la ecuación explícita y se halla el intercepto con el eje y.

$$y = mx + b$$
$$60 = \frac{3}{2}(20) + b, \qquad b = 30$$

Por tanto, la ecuación de la recta es $y = \frac{3}{2}x + 30$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Lee y resuelve.

La ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se conoce como la ecuación punto-pendiente de la recta.

Para aplicar esta ecuación se remplazan las coordenadas del punto $P(x_1, y_1)$ y el valor de la pendiente m. Luego, se despeja y para hallar la ecuación explícita.

Halla la ecuación explícita de cada recta que pasa por P y tiene pendiente m, aplicando la ecuación punto-pendiente.

159. $P(-1, 2)$ y $m = 3$

160. $P(1, 0)$ y $m = -2$

161. $P(-3, -1)$ y $m = 4$

162. $P\left(0, \frac{4}{5}\right)$ y $m = -1$

163. $P(-7, -1)$ y $m = 5$

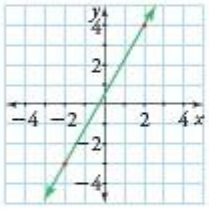
164. $P(-2, 4)$ y $m = -8$

165. $P(-1, -10)$ y $m = 4$

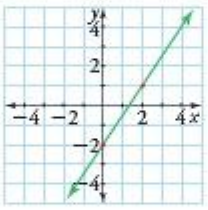
166. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $m = \frac{1}{7}$

Observa cada recta. Luego, determina su ecuación a partir de uno de sus puntos y de su pendiente.

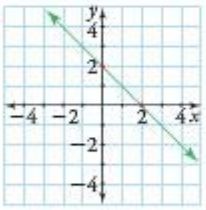
167.



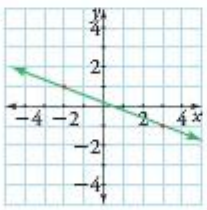
169.



168.



170.



Escribe un ✓ si la afirmación es correcta. Justifica tu respuesta.

171. La ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2)$ y tiene pendiente 3 es $y = 3x - 5$. ☐

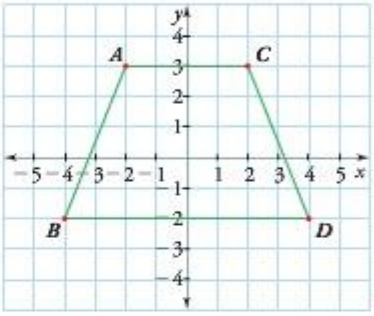
172. Para que dos rectas se intersequen en un único punto sus pendientes deben tener signo opuesto. ☐

Escribe las ecuaciones de dos rectas que cumplan cada condición.

173. Ambas rectas tienen pendiente positiva y se intersecan en $(0, 0)$.

174. La pendiente de una recta es positiva y la de la otra recta es negativa. Además su punto de intersección es $(-1, 1)$.

175. Observa el siguiente trapecio. Luego, halla la ecuación de la recta que contiene cada uno de sus lados, a partir de un vértice y de su pendiente.



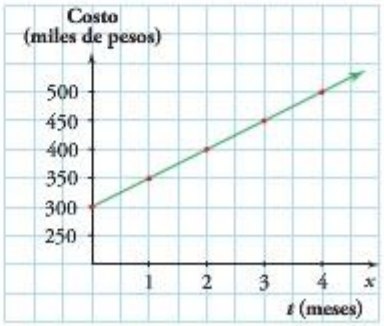
El nivel del agua de un estanque era inicialmente de 240 cm y su contenido desciende a razón de 6 cm por minuto.

176. Realiza una tabla de valores que muestre el nivel del agua en función del tiempo.

177. Determina la pendiente de la recta que representa la relación entre el nivel de agua y el tiempo.

178. Halla la ecuación de la recta a partir de un punto y de su pendiente.

La siguiente gráfica muestra el valor que debe pagar una persona por afiliarse a un club t meses, si paga inicialmente $300.000 de inscripción.



179. Determina la pendiente de la recta.

180. Halla la ecuación de la recta, a partir de un punto y su pendiente.

Recuerda que...

Dados un punto $P(x_1, y_1)$ y la pendiente de una recta, la ecuación punto-pendiente es:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Ecuación de la recta dados dos puntos

Para hallar la ecuación de una recta cuando se conocen dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, primero se calcula la pendiente, y luego se remplaza junto con las coordenadas de un punto en la ecuación punto-pendiente de la recta.

EJEMPLOS

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-2, -2)$ y $Q(3, 1)$.

Primero, se calcula la pendiente de la recta.

$$m = \frac{1 - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{3}{5}$$

Luego, se remplaza la pendiente m y las coordenadas de uno de los puntos, en la ecuación punto-pendiente de la recta.

$$y - 1 = \frac{3}{5}(x - 3)$$

$$y = \frac{3}{5}(x - 3) + 1$$

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$$

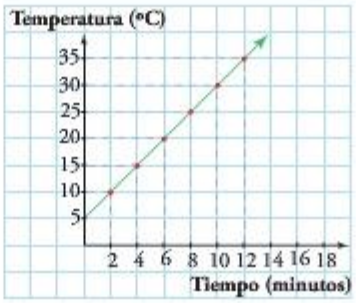
Finalmente, la ecuación explícita de la recta es $y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$.

2. La temperatura inicial de una sustancia es de 5 °C y aumenta cada dos minutos como se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo (minutos)	0	2	4	6	8	10	12
Temperatura (°C)	5	10	15	20	25	30	35

a. Trazar la gráfica que representa el cambio de temperatura en función del tiempo.

Al ubicar las coordenadas de los puntos que aparecen en la tabla de valores, se obtiene la siguiente recta:



b. Hallar la ecuación de la recta.

Primero, se calcula la pendiente con las coordenadas de los puntos (0, 5) y (2, 10).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 5}{2 - 0} = \frac{5}{2}$$

Luego, se remplazan las coordenadas de (0, 5) y $m = \frac{5}{2}$ en la ecuación punto-pendiente, con lo cual se tiene que:

$$y = \frac{5}{2}x + 5$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

181. Si se conocen las coordenadas de dos puntos, ¿cuáles son los pasos para hallar la ecuación de la recta que pasa por ellos?

182. Si una recta pasa por dos puntos que tienen la misma ordenada, ¿cómo es su ecuación?

Halla la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos.

183. $P(1, 0)$ y $Q(0, 0)$

184. $P(-2, 1)$ y $Q(-1, 2)$

185. $P(7, 3)$ y $Q(4, 5)$

186. $P(-1, 10)$ y $Q(2, -9)$

187. $P(8, 4)$ y $Q\left(\frac{1}{3}, 2\right)$

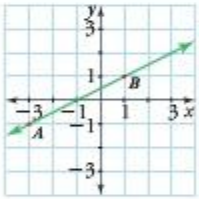
188. $P(-5, 6)$ y $Q(-4, 4)$

189. $P(-6, 2)$ y $Q(-4, 1)$

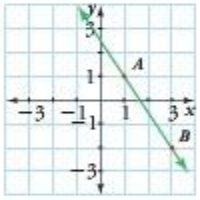
190. $P\left(\frac{1}{8}, 4\right)$ y $Q\left(\frac{1}{4}, -5\right)$

Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A* y *B*.

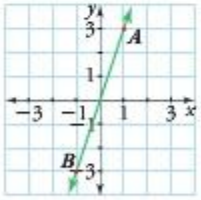
191.



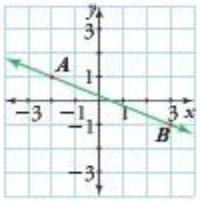
193.



192.



194.



Escribe la ecuación de una recta que cumpla cada condición. Luego, traza su gráfica.

195. Pasa por dos puntos del cuadrante II y su pendiente es positiva.

196. Pasa por dos puntos del cuadrante IV y su pendiente es negativa.

197. Pasa por un punto del cuadrante III y por un punto del cuadrante IV. Además, su pendiente es $m = -4$.

198. Halla el error que se cometió al encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-2, -1)$ y $Q(3, 2)$. Luego, escribe la ecuación correcta.

$m = \frac{2 + 1}{3 - 2} = \frac{3}{1} = 3$ Se calcula la pendiente.

$y - 2 = 3(x - 3)$ Se remplazan m y las coordenas de Q.

$y - 2 = 3x - 9$ Se aplica la propiedad distributiva.

$y = 3x - 7$ Se suma 2.

Lee cada enunciado. Luego, resuelve.

199. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces la recta que pasa por los puntos (a, b) y $(2a, 2b)$, ¿tiene pendiente positiva o negativa?

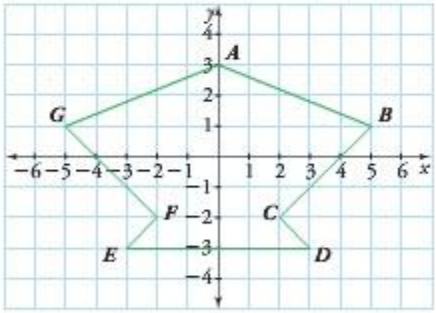
200. Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces la recta que pasa por $P(a, b)$ y $Q(2a, b)$, ¿se inclina a la derecha o a la izquierda?

201. ¿La recta que pasa por los puntos (a, b) y $(-a, b)$ es vertical u horizontal? ¿Por qué?

La distancia *d* entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ está dada por la expresión

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Con esta expresión se puede calcular, en el plano cartesiano, el perímetro de una figura como la siguiente.



202. Determina la longitud de cada lado de la figura, aplicando la fórmula de la distancia.

203. Calcula el perímetro de la figura.

204. Halla la ecuación de la recta que contiene cada lado a partir de los vértices de la figura.

205. Halla el área de la figura.

206. Escribe la ecuación del eje de simetría de la figura.

Ecuación general de la recta

La **ecuación general de la recta** es de la forma

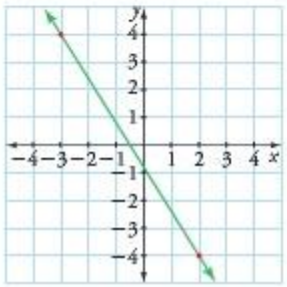
$$Ax + By + C = 0$$

Donde A, B y C son números reales.

Por ejemplo, la ecuación $-3x + 2y + 5 = 0$ es la ecuación general de la recta cuya ecuación explícita es $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, en la que $\frac{3}{2}$ es la pendiente y $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje y.

EJEMPLOS

1. Hallar la ecuación explícita de la recta que aparece en la siguiente gráfica. Luego, determinar su ecuación general.



Primero, se tiene que los puntos $(-3, 4)$ y $(2, -4)$ pertenecen a la recta.

Segundo, se calcula la pendiente de la recta.

$$m = \frac{4 - (-4)}{-3 - 2}$$
$$= -\frac{8}{5}$$

Luego, se aplica la ecuación punto-pendiente y se halla la ecuación explícita.

$$y - 4 = -\frac{8}{5}(x - (-3))$$
$$y = -\frac{8}{5}x - \frac{4}{5}$$

Finalmente, se multiplican ambos miembros de la ecuación explícita por 5 y se iguala a cero.

$$y = -\frac{8}{5}x - \frac{4}{5}$$
$$5y = -8x - 4$$
$$8x + 5y + 4 = 0$$

Por tanto, la ecuación general, de la recta es $8x + 5y + 4 = 0$.

2. Determinar la ecuación explícita de la recta cuya ecuación general es:

$-4x + 3y + 12 = 0$. Luego, trazar su gráfica.

Para hallar la ecuación explícita de una recta a partir de su ecuación general, se despeja y realizando los siguientes pasos:

$-4x + 3y + 12 = 0$	Ecuación general.
$-4x + 3y = -12$	Se resta 12 en ambos miembros de la ecuación.
$\frac{-4x}{3} + y = -4$	Se divide entre 3.
$y = \frac{4x}{3} - 4$	Se suma $\frac{4x}{3}$.

Por tanto, si la ecuación general de la recta es $-4x + 3y + 12 = 0$, entonces, su ecuación explícita es $y = \frac{4}{3}x - 4$, que se muestra en la figura 2.

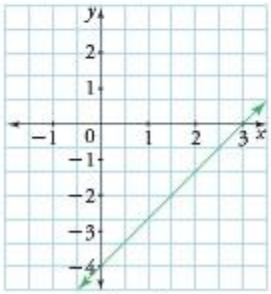


Figura 2.

3. Un submarino se encuentra a una profundidad de −50 m y desciende cada 5 minutos según la siguiente tabla de valores.



Tiempo (minutos)	0	5	10	15	20
Profundidad (metros)	−50	−100	−150	−200	−250

a. Hallar la ecuación explícita de la recta que representa la variación de la profundidad con respecto al tiempo.

Primero, se tiene que el punto de intersección con el eje y es $b = -50$.

Luego, se remplazan las coordenadas de $(5, -100)$ en la ecuación explícita y $b = -50$, para hallar la pendiente.

$y = mx + b$

$-100 = 5m - 50$

$m = -10$

Finalmente, se tiene que la ecuación explícita es $y = -10x - 50$.

b. Determinar la ecuación general de la recta.

Se realizan los siguientes pasos:

$y = -10x - 50$	Ecuación explícita de la recta.
$y + 50 = -10x - 50 + 50$	Se suma 50 a ambos lados de la ecuación.
$y + 50 = -10x$	Se realizan operaciones.
$10x + y + 50 = 0$	Se suma 10x.

Por tanto, la ecuación general de la recta es $10x + y + 50 = 0$.

Afianzo COMPETENCIAS

Argumento • Propongo • Soluciono problemas

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

207. Si en la ecuación general de una recta se cumple que $C = 0$, entonces la pendiente es $m = -\frac{A}{B}$.

208. Si en la ecuación general de una recta $A = 2B$, entonces la pendiente es -2.

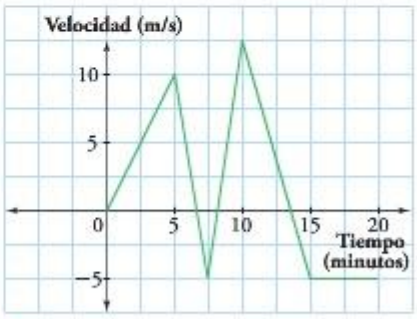
209. En la ecuación $-x + 3y + 2 = 0$ se cumple que $c = 2$ es el intercepto de la recta con el eje y.

En la ecuación general de una recta se cumple que $A = 3$, $B = 3$ y $C = -6$.

210. Determina su ecuación explícita.

211. Traza la gráfica de la recta.

En física, la aceleración de un móvil corresponde a la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo. La siguiente gráfica representa la velocidad de un móvil en un intervalo de 20 minutos.



212. Determina la ecuación general de la recta en cada intervalo de tiempo.

2.3 Rectas paralelas y perpendiculares

Ampliación multimedia

Recuerda que...

En un plano dos rectas son paralelas si no se intersecan, y son perpendiculares si se intersecan y forman un ángulo de 90°. Si se intersecan pero no son perpendiculares se denominan secantes.

En un plano dos rectas pueden ser paralelas, secantes o perpendiculares. En particular, las rectas paralelas y perpendiculares se pueden estudiar a partir de sus pendientes.

Cuando dos rectas l_1 y l_2 son paralelas se simbolizan $l_1 \parallel l_2$ y sus pendientes son iguales.

Por ejemplo, las rectas $y = -4x + 3$ y $y = -4x - 5$ son paralelas por que ambas tienen pendiente -4. En cambio, las rectas $y = -6x + 1$ y $y = 6x$ no son paralelas porque sus pendientes -6 y 6 son diferentes.

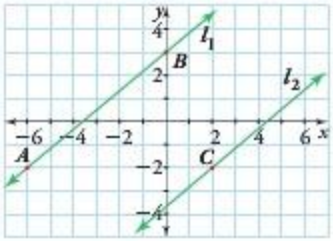
Cuando dos rectas son perpendiculares, sus pendientes también se relacionan.

Cuando dos rectas l_1 y l_2 son perpendiculares se simbolizan $l_1 \perp l_2$ y el producto de sus pendientes es igual a -1.

Por ejemplo, las rectas $y = -\frac{1}{5}x + 3$ y $y = 5x + 1$ son perpendiculares porque $\left(-\frac{1}{5}\right)(5) = -1$.

EJEMPLOS

1. Hallar las ecuaciones generales de las rectas paralelas que aparecen en la siguiente gráfica.



Primero, se calcula la pendiente de la recta l_1, a partir de los puntos $A(-6, -2)$ y $B(0, 3)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{0 - (-6)} = \frac{5}{6}$$

Segundo, se remplazan las coordenadas de B y la pendiente m, para hallar la ecuación de la recta l_1.

$$y - 3 = \frac{5}{6}(x - 0)$$

$$y = \frac{5}{6}x + 3$$

Luego, se halla la ecuación de la recta l_2 a partir del punto $C(2, -2)$ y de la pendiente m que es igual para ambas rectas.

$$y - (-2) = \frac{5}{6}(x - 2)$$

$$y = \frac{5}{6}x - \frac{11}{3}$$

Finalmente, se multiplican las ecuaciones explícitas de ambas rectas por 6 y se igualan a cero para obtener las ecuaciones generales.

$y = \frac{5}{6}x + 3$	$y = \frac{5}{6}x - \frac{11}{3}$
$6y = 5x + 18$	$6y = 5x - 22$
$5x - 6y + 18 = 0$	$5x - 6y - 22 = 0$

Por tanto, la ecuación general de la recta l_1 es $5x - 6y + 18 = 0$ y la ecuación general de la recta l_2 es $5x - 6y - 22 = 0$.

2. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $3x - 2y + 5 = 0$ que pasa por el punto $(-3, 2)$.

Primero, se determina la ecuación explícita de la recta.

$3x - 2y + 5 = 0$

$3x - 2y + 5 = 0$ Ecuación general de la recta.

$-2y = -5 - 3x$ Se resta 5 y $3x$ a ambos lados.

$y = \frac{3x}{2} + \frac{5}{2}$ Se divide entre -2.

Luego, se tiene que la pendiente de la recta es $m_1 = \frac{3}{2}$. Así, para encontrar la pendiente de la recta perpendicular m_2 se tiene que:

$m_1 \cdot m_2 = -1$ Producto de las pendientes.

$\frac{3}{2} \cdot m_2 = -1$ Se remplaza por m_1.

$m_2 = -\frac{2}{3}$ Se divide entre $\frac{3}{2}$ y se opera.

Finalmente, se halla la ecuación de la recta perpendicular a partir de m_2 y del punto $(-3, 2)$.

$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - (-3))$ Se remplazan m_2 y las coordenadas de $(-3, 2)$

$y - 2 = -\frac{2}{3}x - 2$ Se aplica la propiedad distributiva.

$y = -\frac{2}{3}x$ Se suma 2.

Por tanto, la ecuación es $y = -\frac{2}{3}x$.



3. Ricardo quiere aprender artes marciales y con dos academias. En la academia *A* la inscripción cuesta $20.000 y $30.000 la mensualidad. En cambio, en la academia *B* la inscripción no tiene costo y el valor de la mensualidad es el mismo.

a. Hallar las ecuaciones de las rectas que representan los costos en función del tiempo en meses.

Primero, se tiene que el valor de la mensualidad corresponde a la pendiente m de ambas rectas.

Luego, en el caso de la academia *A* se tiene que 20.000 es el intercepto con el eje y. En cambio, en la academia *B* el intercepto con el eje y es 0 porque la inscripción no tiene ningún valor.

Finalmente, se tiene que las rectas que representan la relación entre el costo y el tiempo son $y = 30.000x + 20.000$ y $y = 30.000x$, para las academias *A* y *B*, respectivamente. Como las pendientes son iguales, entonces, las rectas son paralelas.

b. Calcular cuánto le cuesta a Ricardo asistir a cada academia durante un año.

Como un año son 12 meses, entonces, se remplaza $x = 12$ en cada ecuación y se efectúan las operaciones.

$y = 30.000(12) + 20.000$ $\qquad$ $y = 30.000(12)$

$y = 380.000$ $\qquad$ $y = 360.000$

Por tanto, Ricardo debe pagar $380.000 en la academia *A* y $360.000 en la academia *B*.

Matemáticamente

Si dos rectas tienen igual pendiente y además intersecan al eje y en el mismo punto, ¿cómo son las rectas?

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Completa cada enunciado.

213. Dos rectas son _____ si tienen la misma pendiente.

214. Dos rectas son perpendiculares si el _____ de sus pendientes es igual a _____.

Determina si cada par de rectas son o no paralelas.

215. $y = 5x$ $\quad y = 5x + 3$

216. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ $\quad y = -\frac{1}{2} + x$

217. $3x + 5y - 1 = 0$ $\quad 3y + 5x + 1 = 0$

218. $2x + 4y + 8 = 0$ $\quad x + 2y + 4 = 0$

Clasifica cada par de rectas en paralelas, secantes o perpendiculares. Justifica tu respuesta.

219. $y = -5x + 3$ $\quad y = -3 + 5x$

220. $-\frac{1}{2}x + y + 1 = 0$ $\quad -x + 2y + 2 = 0$

221. $y = -7x + \frac{3}{2}$ $\quad y = -\frac{3}{2} - 7x$

222. $5x + y = 0$ $\quad x - 5y + 15 = 0$

223. $4x - y + 1 = 0$ $\quad 3x - y - 1 = 0$

224. $5x + 2y - 3 = 0$ $\quad 10x - 3y + 6 = 0$

225. $7x + 3y + 1 = 0$ $\quad 6y + 14x + 2 = 0$

Escribe las ecuaciones de las rectas que cumplen cada condición.

226. Una recta perpendicular a dos rectas paralelas.

227. Una recta que interseca a dos rectas perpendiculares.

228. Dos rectas perpendiculares que se intersecan en el punto $P(-3, 3)$.

229. Dos rectas perpendiculares a una misma recta en puntos diferentes.

Halla la ecuación de la recta paralela a la recta dada que pasa por el punto que se indica.

230. $y = 6x - 4$ $\quad A(3, 2)$

231. $y = 7x + 3$ $\quad B(-1, 5)$

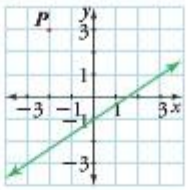
232. $y = 8 - \frac{1}{5}x$ $\quad C(-4, 9)$

233. $2x - y + 3 = 0$ $\quad D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

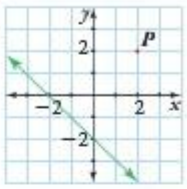
234. $-4x + 6y + 9 = 0$ $\quad E\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$

Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta que pasa por el punto P que se indica.

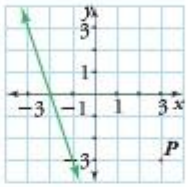
235.



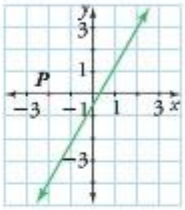
237.



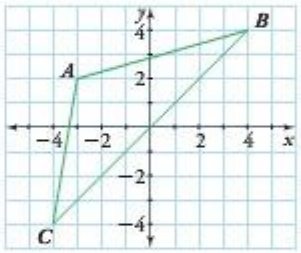
236.



238.



239. **Halla la ecuación de la recta que contiene cada altura del siguiente triángulo.**



Un automóvil se mueve en un instante $t = 0$ a una velocidad de 360 m/s, a partir del cual comienza una desaceleración constante hasta llegar al reposo al cabo de 6 minutos.

En ese mismo intervalo de tiempo, otro automóvil parte del reposo con una aceleración constante hasta alcanzar una velocidad de 360 m/s.



240. Halla la ecuación de la recta que representa la variación de la velocidad de cada automóvil con respecto al tiempo en segundos.

241. Comprueba que ambas rectas son perpendiculares.

242. Determina en qué instante las velocidades de los automóviles son iguales.

3. Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

Recurso imprimible · Actividad

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones lineales a los que se les busca una solución común.

Por ejemplo, con las ecuaciones $y = -2x + 1$ y $y = 3x$ se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} y = -2x + 1 & (1) \\ y = 3x & (2) \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $x = \frac{1}{5}$ y $y = \frac{3}{5}$. Esta se puede verificar remplazando los valores de x y de y en cada ecuación así:

Ecuación (1)	Ecuación (2)
$y = -2x + 1$	$y = 3x$
$\frac{3}{5} = -2\left(\frac{1}{5}\right) + 1$	$\frac{3}{5} = 3\left(\frac{1}{5}\right)$
$\frac{3}{5} = -\frac{2}{5} + 1$	$\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$
$\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$	

Como la igualdad es verdadera en ambas ecuaciones, entonces, se cumple que $x = \frac{1}{5}$ y $y = \frac{3}{5}$, es solución del sistema.

Recuerda que...

Las ecuaciones de la forma

$y = mx + b$

$Ax + By + C = 0$

se denominan ecuaciones lineales porque su representación gráfica es una recta.

Matemáticamente

¿Es $x = -2$ y $y = 3$ solución del siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = 8 - x \end{cases}$$

3.1 Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, entre los cuales se encuentran el **método gráfico** y el **método de igualación**.

Método gráfico

Ampliación multimedia · Actividad

Para resolver un sistema de ecuaciones aplicando el método gráfico, se traza cada recta y se ubica su punto de intersección.

Al respecto se pueden presentar tres casos:

Caso 1. Las rectas no se intersecan. En este caso el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Caso 2. Las rectas se intersecan en un único punto. En este caso la solución del sistema corresponde a las coordenadas del punto de intersección.

Caso 3. Las rectas coinciden en todos sus puntos. En este caso el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

Por ejemplo, para resolver el siguiente sistema de ecuaciones se traza la recta que representa cada ecuación como se muestra en la gráfica de la figura 3.

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

Como el punto de intersección de ambas rectas es $(-1, 2)$, entonces la solución del sistema de ecuaciones es: $x = -1$ y $y = 2$

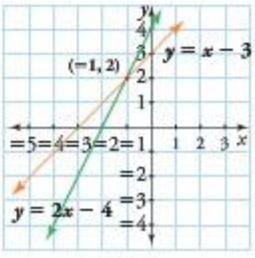


Figura 3.

Ampliación multimedia

Método de igualación

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se realizan los siguientes pasos:

Primero, se halla la ecuación explícita de cada recta.

Segundo, se igualan las ecuaciones.

Luego, se despeja una de las incógnitas.

Finalmente, se remplaza en una de las ecuaciones originales, el valor de la incógnita que se despejó en el paso anterior, para hallar el valor de la otra incógnita.

EJEMPLOS

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación. Luego, trazar las rectas para verificar la solución por el método gráfico.

$$\begin{cases} 2x - y = 6 & ① \\ 3x + 2y = 44 & ② \end{cases}$$

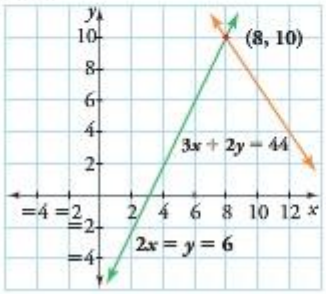
Se realizan los siguientes pasos:

$y = 2x - 6$	Se halla la ecuación explícita de la recta ①.
$y = 22 - \frac{3}{2}x$	Se halla la ecuación explícita de la recta ②.
$2x - 6 = 22 - \frac{3}{2}x$	Se igualan las ecuaciones.
$2x + \frac{3}{2}x = 22 + 6$	Se transponen términos.
$\frac{7x}{2} = 28$	Se reducen términos semejantes.
$7x = 56$	Se multiplica por 2.
$x = 8$	Se divide entre 7.

Para hallar el valor de y se remplaza el valor de x en la ecuación ①.

$2x - y = 6$	Ecuación ①.
$2(8) - y = 6$	Se remplaza $x = 8$.
$16 - y = 6$	Se multiplica.
$y = 10$	Se despeja y.

Al trazar las dos rectas se verifica que su punto de intersección es (8, 10).



2. En una exposición de arte, se cobran $15.000 por la entrada de un adulto y $8.000 por la de un niño. Si cierto día se vendieron 500 boletas y en total se recaudaron $5.540.000, ¿cuántos adultos y cuántos niños ingresaron?



Primero, se representa con x la cantidad de adultos y con y la cantidad de niños y se tiene que la cantidad total de boletas vendidas es de $x + y = 500$.

Tercero, la ecuación que indica el dinero recaudado en total es $15.000x + 8.000y = 5.540.000$

Luego, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + y = 500 & ① \\ 15.000x + 8.000y = 5.540.000 & ② \end{cases}$$

Finalmente, se resuelve el sistema de ecuaciones.

$y = 500 - x$	Se halla la ecuación explícita de la recta ①.
$y = \frac{1.385}{2} - \frac{15}{8}x$	Se halla la ecuación explícita de la recta ②.
$500 - x = \frac{1.385}{2} - \frac{15}{8}x$	Se igualan las ecuaciones.
$\frac{7}{8}x = \frac{385}{2}$	Se transponen términos y se simplifica.
$7x = 1.540$	Se multiplica por 8.
$x = 220$	Se divide entre 7.

Al remplazar $x = 220$ en la ecuación $x + y = 500$, se obtiene que $y = 280$.

Por tanto, a la exposición de arte ingresaron 220 adultos y 280 niños.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Observa el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Luego responde.

$$\begin{cases} y = ax + 2 \\ y = cx - 3 \end{cases}$$

243. Si $a = c$, ¿qué pasa con la solución del sistema de ecuaciones?

244. Si $c = -a$ y $a \neq 0$, ¿cuál es la solución del sistema de ecuaciones?

Verifica si los valores de x y de y son solución del sistema de ecuaciones.

245. $\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 10 \end{cases}$ $x = 12$ y $y = 2$

246. $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = x - 2 \end{cases}$ $x = -\frac{5}{2}$ y $y = 9$

247. $\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = 5x \end{cases}$ $x = 5$ y $y = -4$

248. $\begin{cases} 3x - 5y + 1 = 0 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$ $x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{2}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método gráfico.

249. $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

250. $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$

251. $\begin{cases} y = -3x - 5 \\ y = 6x + 4 \end{cases}$

252. $\begin{cases} 5x + y - 4 = 0 \\ y + 5x + 1 = 0 \end{cases}$

253. $\begin{cases} 6x - y - 2 = 0 \\ 30x - 5y - 10 = 0 \end{cases}$

254. $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x + 5y + 30 = 0 \end{cases}$

Aplica el método por igualación para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

255. $\begin{cases} 6x - y = 9 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

256. $\begin{cases} 10x + 9y = 8 \\ 8x - 15y = -1 \end{cases}$

257. $\begin{cases} 7x + 2y - 12 = 0 \\ 3x - 6y + 8 = 0 \end{cases}$

258. $\begin{cases} -2x + y = 110 \\ -3x + y = 40 \end{cases}$

259. $\begin{cases} 15x - 8y - 80 = 0 \\ 5x - 3y - 25 = 0 \end{cases}$

260. $\begin{cases} y = 5x + 5 \\ 8x - 8y + 56 = 0 \end{cases}$

Determina si cada proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

261. Si dos rectas son paralelas, entonces el sistema de ecuaciones que les corresponde no tiene solución.

262. Si dos rectas son perpendiculares, entonces el sistema de ecuaciones que les corresponde tiene infinitas soluciones.

263. Cuando un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones es porque las rectas correspondientes coinciden en todos sus puntos.

264. Cuando dos rectas son secantes pueden formar un sistema de ecuaciones con dos soluciones diferentes.

Escribe un sistema de ecuaciones lineales para cada condición.

265. No tiene solución.

266. Su solución es $x = -2$ y $y = 1$.

267. Tiene infinitas soluciones.

268. La solución para x es igual que para y.

269. Completa el siguiente sistema de ecuaciones para que su solución sea $x = 3$ y $y = 2$.

$$\begin{cases} \square x - 2y = 9 \\ 6x - \square y = 10 \end{cases}$$

Lee y resuelve.

270. La edad de un padre y su hija suman 77 años y, dentro de dos años, la edad del padre será el doble de la de su hija. Calcula sus edades.

271. Un libro tiene entre 200 y 300 páginas. Si en el número de páginas la cifra de las decenas es la tercera parte de la cifra de las unidades y la suma de las tres cifras es 14, ¿cuántas páginas tiene el libro?



272. El perímetro de un rectángulo es de 60 cm. Determina las dimensiones del rectángulo, si el largo es 6 cm mayor que el ancho.

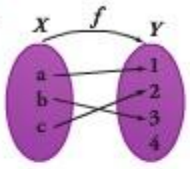
273. Marcela vende reproductores mp3 y memorias USB. En una semana recibió $1.641.000 por la venta de 55 artículos. Si cada mp3 vale $50.900 y cada memoria $17.800, ¿cuántos mp3 y cuántas memorias vendió Marcela?

EJERCICIOS PARA REPASAR

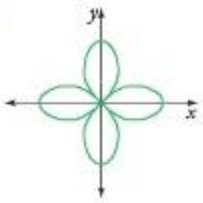
Función

Determina si las relaciones representan una función.

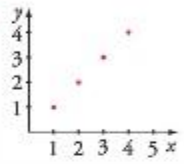
274.



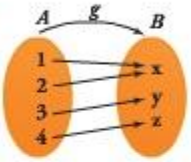
276.



275.



277.



Completa el dominio y el rango de la función f a partir de su grafo.

Grafo f = {(0, 500), (1, 550), (2, 600), …}

278. Dom f = {_____}

279. Ran f = {_____}

La expresión algebraica que representa una función f es $f(x) = -3x + 1$.

280. Completa la siguiente tabla de valores.

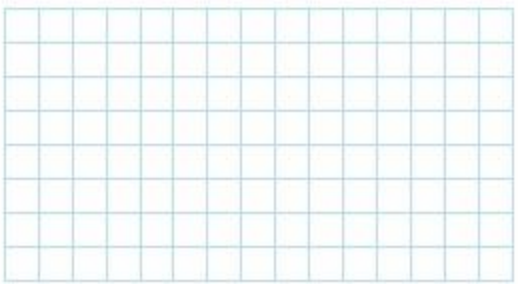
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$							

281. Determina si la función es lineal o afín. Justifica tu respuesta.

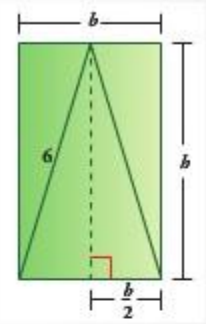
_____

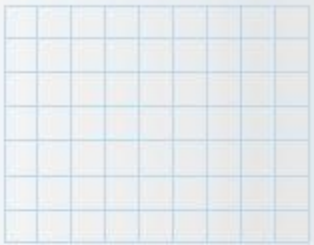
_____

282. Traza la gráfica de la función, teniendo en cuenta que $x \in \mathbb{N}$.



283. Expresa el área del rectángulo en función de su base.





La recta

Clasifica las siguientes rectas en creciente, decreciente, horizontal o vertical.

284. $y = -4 + 3x$ _____

285. $y = -\frac{1}{2}x + 7$ _____

286. $2y - x + 1 = 0$ _____

287. $-3x + 4y + 6 = 0$ _____

Escribe la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m.

288. $P(-2, 3)$ y $m = 2$

Ecuación explícita: _____

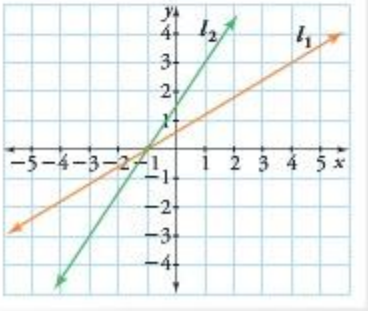
289. $P\left(\frac{1}{4}, -5\right)$ y $m = -3$

Ecuación explícita: _____

290. $P\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $m = -\frac{1}{5}$

Ecuación explícita: _____

Escribe la ecuación general de cada recta:



291. Recta l_1: _____

292. Recta l_2: _____

Halla la ecuación general de cada recta a partir de su ecuación explícita.

293. $y = -5x + 9$

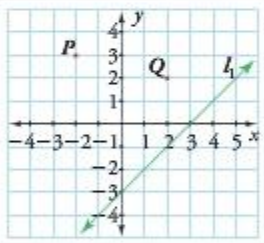
294. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{2}{7}$

Determina la ecuación explícita de la recta a partir de su ecuación general.

295. $8x - 3y + 12 = 0$

296. $-15y + 6x = -4$

297. Escribe la ecuación explícita de la recta paralela a l_1 que pasa por P y la ecuación general de la recta perpendicular a l_1 que pasa por Q.



298. Los interceptos con el eje y de dos rectas l_1 y l_2 son b y c, respectivamente.

Si las dos rectas se intersecan en el punto $P(2, -1)$ y $b, c \in \mathbb{N}$, determina las pendientes de ambas rectas y sus ecuaciones generales, si una pendiente es el doble de la otra y $b + c = 4$.

299. Escribe la ecuación de la recta l_1 paralela a $4x + 2y - 1 = 0$, que pasa por $Q(-2, 2)$.

Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método gráfico.

300. $\begin{cases} y = -\frac{9}{2}x + 5 \\ y = -5x + 6 \end{cases}$

301. $\begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ 7x - 3y = -20 \end{cases}$

Halla la solución de cada sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación. Luego, escribe el valor de cada incógnita.

302. $\begin{cases} 11x + 4y = -35 \\ x + 6y = -6 \end{cases}$ $x =$ ____ y $y =$ ____

303. $\begin{cases} -x - 4y = -14 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ $x =$ ____ y $y =$ ____

304. $\begin{cases} 10x - 4y = -9 \\ 6x + y = 15 \end{cases}$ $x =$ ____ y $y =$ ____

305. $\begin{cases} 12x - 5y = 100 \\ -3x + 4y = 19 \end{cases}$ $x =$ ____ y $y =$ ____

Escribe una ecuación para completar cada sistema de ecuaciones, de tal forma que se cumpla la condición.

306. $\begin{cases} 7x - 5y = 4 \\ _____ \end{cases}$ No tiene solución.

307. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y + 2 = 0 \\ _____ \end{cases}$ Tiene infinitas soluciones.

308. $\begin{cases} _____ \\ \frac{2}{5}x + 4 + 3y = 0 \end{cases}$ Tiene como solución $x = 5$ y $y = -2$

PROBLEMAS PARA REPASAR

Sofía pagó $2.230.000 en total por una nevera y por una lavadora. Si le hubieran hecho un descuento del 5% en el precio de la nevera y un descuento del 8% en el precio de la lavadora, entonces Sofía, habría pagado $2.095.100 por los dos electrodomésticos.

¿Cuál es el precio de cada electrodoméstico?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es el precio de cada electrodoméstico?

¿Cuales son los datos del problema?

Sofía pagó $2.230.000 en total por la nevera y por la lavadora. Además, si le hubieran hecho un descuento de 5% en el precio de la nevera y del 8% en el precio de la lavadora, entonces solo habría pagado $2.095.100.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se representa con x el precio de la nevera y con y el precio de la lavadora.

Así, la ecuación $x + y = 2.230.000$ representa la cantidad total que pagó Sofía por ambos electrodomésticos.

Segundo, se tiene que $x - 0{,}05x$ es el valor de la nevera con el 5% de descuento y $y - 0{,}08y$ es el valor de la lavadora con el 8% de descuento.

Así, la ecuación que representa el precio total de ambos electrodomésticos con descuento es:

$$(x - 0{,}05x) + (y - 0{,}08y) = 2.095.100$$

$$0{,}95x + 0{,}92y = 2.095.100$$

Luego, se resuelve el sistema de ecuaciones.

$\begin{cases} x + y = 2.230.000 \\ 0{,}95x + 0{,}92y = 2.095.100 \end{cases}$ Sistema de ecuaciones lineales.

$\begin{cases} y = 2.230.000 - x \\ y = \dfrac{2.095.100 - 0{,}95x}{0{,}92} \end{cases}$ Se determinan las ecuaciones explícitas.

$2.230.000 - x = \dfrac{2.095.100 - 0{,}95x}{0{,}92}$ Se igualan las ecuaciones.

$2.051.600 - 0{,}92x = 2.095.100 - 0\ ,95x$ Se multiplica por 0,92.

$0{,}03x = 43.500$ Se reducen términos semejantes.

$x = 1.450.000$ Se divide entre 0,03.

Finalmente, se tiene que $y = 780.000$.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica la solución del sistema de ecuaciones. Luego, se tiene que el precio de la nevera es $1.450.000 y el de la lavadora $780.000.

Resuelve las actividades 309 y 310 de acuerdo con el siguiente enunciado.

La tabla muestra la distancia que recorre un automóvil durante 6 segundos.

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (metros)	0	15	30	45	60	75	90

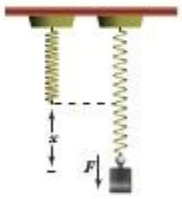
309. Calcula la pendiente de la recta que describe el desplazamiento del automóvil.

310. Escribe la ecuación de la recta.

_____

Resuelve las actividades 311 y 312 de acuerdo con la siguiente información.

Según la ley de Hooke, la fuerza F, en newtons requerida para estirar un resorte x centímetros, más allá de su longitud natural, está dada por la expresión $F = Kx$ donde K es la constante de elasticidad del resorte.



311. Completa la siguiente tabla de valores teniendo en cuenta que: $K = 4{,}5$.

Fuerza (F) en newtons	Longitud (x) del resorte en centímetros
10	
15	
18	
21	
30	
40	

312. Realiza la gráfica teniendo en cuenta los datos de la tabla anterior.

Resuelve las actividades 313 y 314 de acuerdo con la siguiente información.

La estatura E (en centímetros) de una mujer, se puede expresar en función de la longitud f de su fémur mediante la expresión $E = 2f + 73$.



313. Completa la tabla.

Longitud del fémur (cm)	35	37	39	40
Estatura				

314. Escribir la pendiente y el intercepto con el eje y de la recta que representa la estatura de una mujer en función de la longitud de su fémur.

_____

315. Un comerciante compró dos relojes de marcas distintas y pagó $300.000 por ambos. Si luego vendió los dos relojes en $317.500, ¿cuánto pagó por cada reloj si en la venta del primero ganó el 20% y en la venta del segundo perdió el 5%?

316. Un estudiante presenta una evaluación de 10 preguntas. Por cada pregunta acertada le dan 2 puntos y por cada pregunta incorrecta le quitan un punto. Si la calificación final fue de 8 puntos, ¿cuántos aciertos y fallos tuvo el estudiante?



_____

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para determinar la concentración de una sustancia química.

La **espectrofotometría** es una técnica que permite medir la concentración de una sustancia química por medio de la luz. Esta técnica consiste en emitir luz a un cuerpo, de tal forma que sea absorbida por sus electrones libres para observar la reacción que tienen.

La espectrofotometría es muy utilizada en bioquímica para analizar la composición del ADN de un organismo y para cuantificar las proteínas y los azúcares, entre otros. Las muestras son introducidas en recipientes de diferente material según el cual se utiliza un determinado tipo de luz. Por ejemplo, cuando se usa un recipiente de cuarzo, generalmente se proyecta luz ultravioleta.

La expresión que permite encontrar la absorbancia A de luz de una sustancia (cuando su magnitud es menor que 1,5), en función de la concentración (C) de la molécula, es: $A = mC$

Donde m es una constante que depende del tipo de incidencia de la luz sobre la molécula.

Para mayor exactitud también es posible encontrar un parámetro p que indica la absorbancia cuando la concentración de la molécula es cero. Así, la expresión de la absorbancia en este caso es: $A = mC + p$

Por tanto, la expresión que permite calcular la absorbancia representa una recta cuya pendiente es la constante m y cuyo intercepto con el eje y es el parámetro p. Sin embargo, es importante tener en cuenta que esta expresión es válida solo cuando la absorbancia de la molécula está entre 0 y 1,5.

En el laboratorio, cada vez que se desea conocer la concentración de una muestra, se mide su absorbancia por medio de un espectrofotómetro (cuyos elementos se muestran en la siguiente figura) y se despeja la concentración para obtener su magnitud.



El proceso que lleva a cabo un espectrofotómetro inicia en la fuente luminosa y termina en el detector como se muestra en la siguiente imagen.



Por ejemplo, cuando se determina con el espectrofotómetro que una muestra tiene una absorbancia de 0,8 cuando $m = 0{,}003$ y $p = 0{,}02$, entonces la ecuación lineal es:

$$A = 0{,}003C + 0{,}02$$

De donde se obtiene que:

$$C = \frac{A - 0{,}02}{0{,}003}$$

Como la absorbancia es 0,8 se remplaza y se resuelve así:

$$C = \frac{0{,}8 - 0{,}02}{0{,}003}$$

$$C = 260$$

Por tanto, la muestra tiene una concentración de 260 µg (microgramos) por unidad de volumen.

---

1. **Se utilizó un espectrofotómetro para observar la absorbancia de diferentes tipos de luz y se obtuvieron los siguientes resultados.**

Absorbancia	0,6	0,8	1,0
Concentración (mg/mL)	150	180	210

   a. Realiza la gráfica de absorbancia en función de la concentración.

   b. Encuentra la ecuación de la recta.

2. **La levotiroxina es un fármaco utilizado para el cáncer de tiroides. Para conocer si este medicamento conserva sus propiedades cuando se expone a diferentes condiciones climáticas es necesario realizar pruebas de espectrofotometría. Si la expresión que relaciona la absorbancia en función de la concentración de este medicamento es:**

$$A = 0{,}0015C + 0{,}12$$

Halla la concentración para una absorbancia de 0,5.

Trabaja con Winplot

Objetivo: resolver un sistema de ecuaciones lineales aplicando las herramientas de Winplot.

Descripción: obtener la gráfica de dos rectas, una a partir de su ecuación explícita y otra a partir de su ecuación general. Luego, hallar las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas para encontrar la solución del sistema de ecuaciones que conforman.

Para acceder a Winplot, ingresa y descarga el programa en: winplot.softonic.com

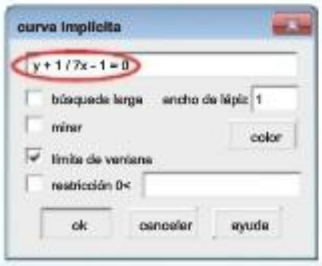
1. Haz clic en **Ventana** y activa la opción **2-Dim.** Automáticamente se desplegará una nueva ventana en la que aparecerá el plano cartesiano. Luego, haz clic en **Ecua** y selecciona **Explícita.**



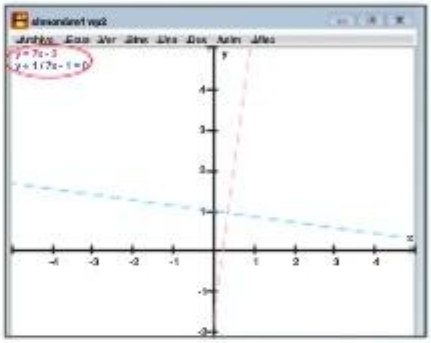
2. Escribe la función lineal $f(x) = 7x - 2$ y presiona **ok**. Aparecerá la gráfica de la función.



3. Haz clic en **Ecua** y activa la opción **Implícita**. Escribe la ecuación general de la recta $y + \frac{1}{7}x - 1 = 0$ y presiona **ok** para que aparezca la gráfica.



4. En la ventana **inventario [sinnombre.wp2]** selecciona cada recta y haz clic en ecuación. Aparecerá la ecuación de cada recta en la ventana donde están las gráficas.

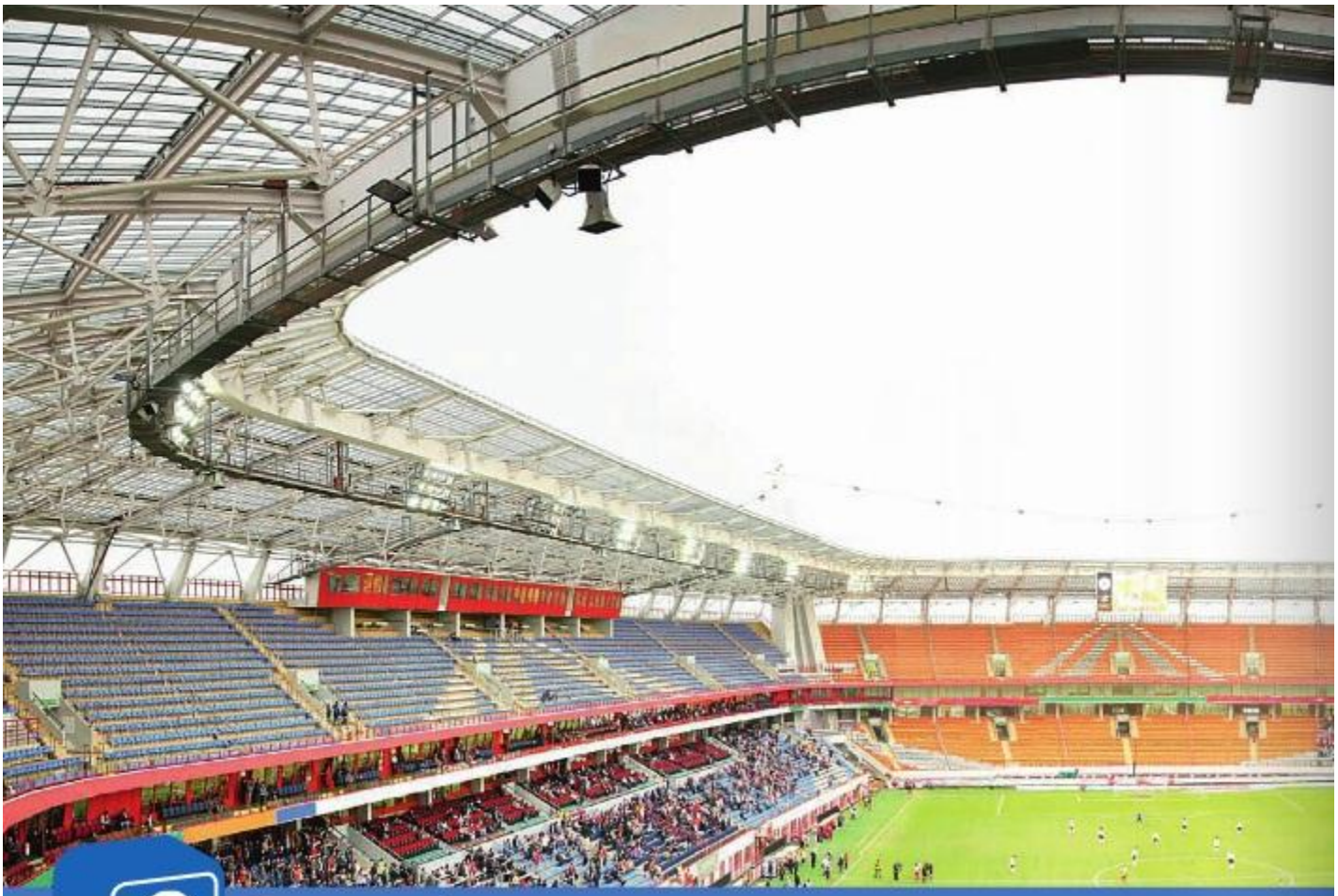


5. En la ventana en la que se encuentran las gráficas selecciona **Dos** y haz clic en **Intersección.** Aparecerá una ventana con las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas, las cuales corresponden a la solución del sistema ecuaciones lineales. Puedes ubicar el punto en la gráfica haciendo clic en **marcar punto.**



6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método gráfico con Winplot.

a. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2y + x = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 4x + y = 18 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$



9 Geometría

Estándares: pensamientos espacial y métrico

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer las diferentes **clasificaciones de ángulos y triángulos.**
- Identificar los **ángulos entre paralelas.**
- Establecer los **criterios de congruencia de triángulos.**
- Determinar las **líneas notables en un triángulo.**
- Reconocer las **unidades de longitud y área.**

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Por competencias

7 Multimedia **1** Audio

1 Galería **5** Imprimibles

7 Actividades **1** Enlace web

Lo que sabes...

1. Usa el transportador para medir cada ángulo.



2. Traza una recta perpendicular a cada recta, que pase por el punto indicado.



3. Traza una recta paralela a cada recta, que pase por el punto indicado.





Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para conocer las dimensiones de una cancha de fútbol.

El deporte más popular del mundo es el fútbol y es uno de los juegos más accesibles para practicarlo. En este deporte dos equipos, de 11 jugadores cada uno, juegan durante dos tiempos de 45 minutos más el tiempo de adición.

Para optimizar el rendimiento de los jugadores es necesario conocer las dimensiones del terreno donde juegan.

Las medidas de una cancha pueden variar: el largo puede estar entre 90 y 120 metros, aunque en partidos internacionales esta medida puede ser entre 100 y 110 metros; el ancho puede estar entre 45 y 90 metros y, en partidos internacionales, entre 64 y 75 metros, para evitar que la cancha sea cuadrada.

Lee más acerca de este tema en la página 288.

Cronología de geometría

Egipto. Se construyó la pirámide de Kefrén usando el triángulo pitagórico de proporciones 3-4-5, respectivamente.



India. Se escribió el libro *Aforismos sobre cuerdas* donde se evidencia la utilización del teorema de Pitágoras.

2600 a. C.

400 a. C.

Egipto. Euclides escribió los *Elementos*, donde se aplica el razonamiento deductivo en demostraciones de teorema geométricos.

Alemania. Euler descubrió la recta que pasa por el baricentro, circuncentro y ortocentro de un triángulo.



300 a. C.



1750 d. C.

1829 d. C.

1889 d. C.

París. Se adoptó internacionalmente el sistema métrico decimal para unificar los sistemas de unidades necesarias para el intercambio científico, cultural y comercial.

Rusia. Nikolái Lobachevski escribió *Los principios de la geometría* en donde trató el quinto postulado de Euclides para iniciar la geometría no euclidiana.



1. Ángulos

Ampliación multimedia

Historia de las matemáticas

Medir la Tierra

Un logro notable hace más de 2.000 años. Con palos, ojos, pies y el cerebro, *Eratóstenes* (276-195 a. C.), cerca de 240 a. C., fue la primera persona en hallar la longitud de la circunferencia de la Tierra con una buena precisión.

Un **ángulo** es la unión de dos semirrectas, que tienen un punto común. Las semirrectas son los lados del ángulo y el punto común es el vértice del ángulo.

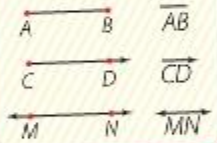
Un ángulo se puede nombrar de las siguientes formas:

- Se nombra el vértice con una letra mayúscula. Primero, se escribe el símbolo $\sphericalangle$, que se lee *ángulo*, seguido por la letra que indica el vértice del ángulo. Así, si B es el vértice, se escribe $\sphericalangle B$ y se lee *ángulo B*.
- Se nombra con tres puntos, un punto en cada semirrecta y el vértice. Se escribe en orden, el símbolo $\sphericalangle$, un punto de una de las semirrectas seguido por el vértice, y un punto de la segunda semirrecta. Por ejemplo, el ángulo con vértice O, formado por las semirrectas $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$, se nombra $\sphericalangle POQ$.
- Se nombra con una letra griega: α, β, γ, θ, ϕ o un número: 1, 2, 3, 4. Se escribe el símbolo $\sphericalangle$ seguido por una letra griega o un número.

La unidad de medida de la amplitud de un ángulo es el grado sexagesimal (°) y el instrumento que se usa para su medición es el transportador.

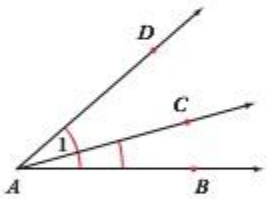
Recuerda que...

Los segmentos, semirrectas y rectas se nombran de la siguiente forma:



EJEMPLOS

1. Observar la figura. Luego, nombrar los ángulos señalados en la figura.



Se nombra el vértice de los ángulos como A y se ubican los puntos B, C y D en las semirrectas, como se muestra en la figura. Así se tienen el $\sphericalangle BAC$ y el $\sphericalangle BAD$.

Para nombrar el otro ángulo se escribe el 1 en la abertura del mismo. Por tanto, se tiene $\sphericalangle 1$. Este ángulo se puede nombrar también como $\sphericalangle CAD$.

2. Medir el siguiente ángulo:



Se coloca el transportador de modo que coincida el centro con el vértice del ángulo, y la $\overrightarrow{BA}$ indique el 0°. Luego, se observa la medida que indica la $\overrightarrow{BC}$.

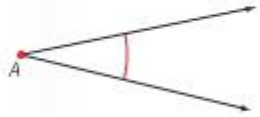
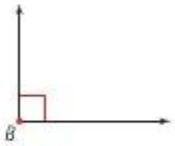
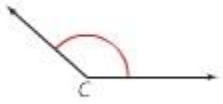
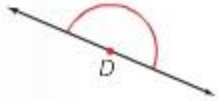
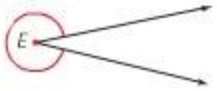
Por tanto, la medida del $\sphericalangle ABC$ es 45°, lo cual se escribe $m\sphericalangle ABC = 45°$.

1.1 Clasificación de ángulos

Actividad

Los ángulos se pueden clasificar según su medida, según la suma de sus medidas o de acuerdo con su posición.

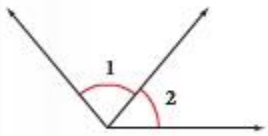
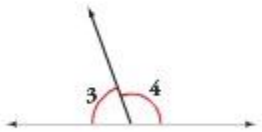
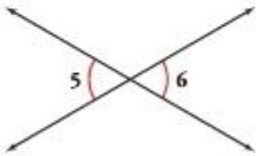
Según su **medida**, un ángulo puede ser:

Agudo	Recto	Obtuso
Mide menos de 90°. 	Mide 90°. 	Mide más de 90° y menos de 180°. 
Llano	**Cóncavo**	**Completo**
Mide 180°. 	Mide más de 180° y menos de 360°. 	Mide 360°. 

Según la **suma de sus medidas** los ángulos pueden ser:

Ángulos complementarios	Ángulos suplementarios
Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.	Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°.

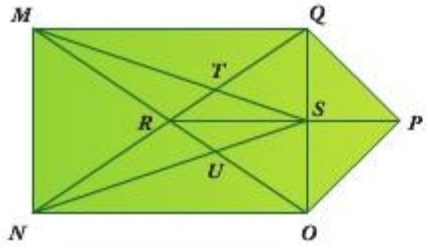
Según su **posición** los ángulos pueden ser:

Consecutivos	Adyacentes	Opuestos por el vértice
Dos ángulos son consecutivos si solo tienen en común el vértice y un lado.  ∢1 y ∢2 son consecutivos.	Dos ángulos son adyacentes si son consecutivos y sus lados no comunes están en la misma recta.  ∢3 y ∢4 son adyacentes.	Dos ángulos son opuestos por el vértice si los dos lados de uno de ellos son las prolongaciones de los lados del otro.  ∢5 y ∢6 son opuestos por el vértice.

Afianzo COMPETENCIAS

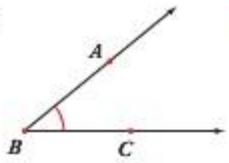
Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Modelo · Razono

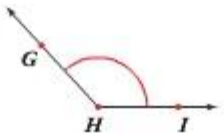
Observa la figura. Luego, nombra los ángulos que se indican.

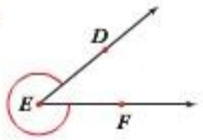


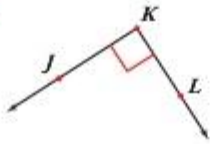
1. Dos ángulos obtusos.
2. Dos ángulos rectos.
3. Dos ángulos cóncavos.
4. Un par de ángulos adyacentes.
5. Un par de ángulos opuestos por el vértice.
6. Un par de ángulos consecutivos y suplementarios.

Mide con el transportador, los siguientes ángulos. Luego, clasifícalos según su medida.

7.


9.


8.


10.


Construye, con el transportador, un ángulo con cada una de las siguientes medidas.

11. $m\measuredangle 1 = 45°$
12. $m\measuredangle ABC = 85°$
13. $m\measuredangle 3 = 235°$
14. $m\measuredangle 2 = 125°$
15. $m\measuredangle DEF = 175°$
16. $m\measuredangle GHI = 280°$

Determina el valor de verdad de los siguientes enunciados.

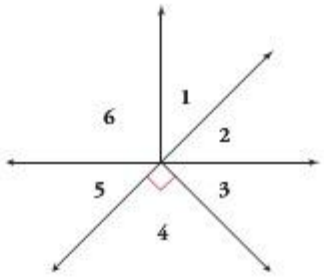
17. Todos los ángulos consecutivos son adyacentes.
18. Dos ángulos agudos pueden ser suplementarios.
19. Todos los ángulos adyacentes son suplementarios.
20. Todos los ángulos opuestos por el vértice son complementarios.

Dibuja y nombra el complemento y el suplemento de cada ángulo.

21.

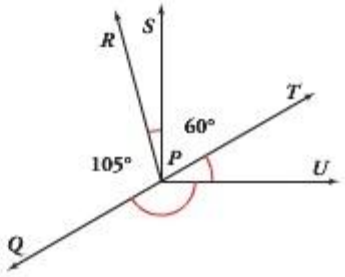

22.


Clasifica los ángulos que se indican, a partir de la figura.



23. $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 3$
24. $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 5$
25. $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 5$
26. $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 5$

27. **Determina las medidas de los ángulos $\measuredangle UPT$, $\measuredangle SPR$ y $\measuredangle QPU$, que se muestran en la figura.**



28. **Halla la medida de los cuatro ángulos que se forman en la siguiente figura. Justifica tu respuesta.**



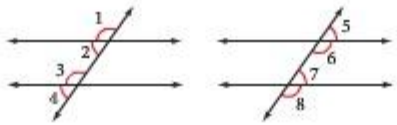
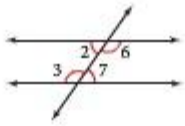
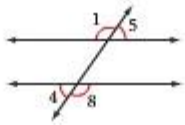
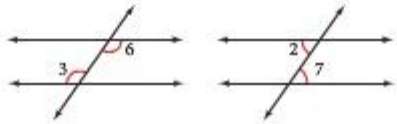
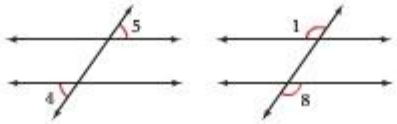
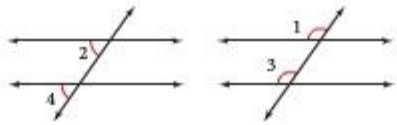
Determina la medida de dos ángulos de acuerdo con las condiciones que se indican.

29. Son suplementarios y están en la razón de 3 a 5.
30. Son complementarios y están en la razón de 1 a 2.

1.2 Ángulos determinados por dos paralelas y una secante

Recurso imprimible · Actividad

Una secante es una recta que interseca a dos o más rectas del mismo plano, en puntos distintos. Cuando una secante interseca dos rectas paralelas, se forman ocho ángulos. Estos ángulos se clasifican según su posición en:

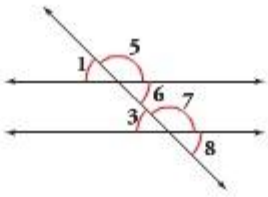
Ángulos colaterales. Son los ángulos que están ubicados al mismo lado de la secante.	
Ángulos internos. Son los ángulos que están ubicados entre las rectas paralelas.	
Ángulos externos. Son los ángulos que están ubicados por fuera de las rectas paralelas.	
Ángulos alternos internos. Son los pares de ángulos internos que no son colaterales y no son adyacentes.	
Ángulos alternos externos. Son los pares de ángulos externos que no son colaterales y no son adyacentes.	
Ángulos correspondientes. Son los pares de ángulos, uno interno y otro externo, que son colaterales pero no adyacentes.	

Luego, si una secante interseca a dos rectas paralelas, entonces se establecen las siguientes propiedades de congruencia entre ángulos:

Propiedad 1. Los ángulos alternos internos son congruentes. En la figura, $\measuredangle 6 \cong \measuredangle 3$.

Propiedad 2. Los ángulos alternos externos son congruentes. Por ejemplo, $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 8$.

Propiedad 3. Los ángulos correspondientes son congruentes. Así, $\measuredangle 5 \cong \measuredangle 7$.



Historia de las matemáticas

Geometrías no euclidianas

El postulado de las paralelas:

"Por un punto dado, exterior a una recta, pasa solamente una paralela a dicha recta", ha generado controversia en la cultura matemática.

La primera persona que entendió lo que estaba ocurriendo con el problema de las paralelas fue Gauss, sin embargo, en 1823 Janos Bolyai escribió a su padre: "he descubierto cosas tan maravillosas que estoy sorprendido... Partiendo de la nada he creado un mundo nuevo y extraño".

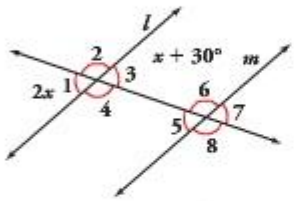
Los matemáticos: Bolyai, Gauss, Riemann y Lobachevsky supusieron lo contrario al postulado de las paralelas, desarrollaron otras geometrías llamadas geometrías no euclidianas.

Recuerda que...

Cuando las rectas l y m son paralelas se escribe $l \parallel m$ y se lee l paralela con m. Cuando dos ángulos $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ tienen la misma medida, se dice que son congruentes y se simboliza $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$.

EJEMPLO

Hallar la amplitud de cada ángulo, que se muestra en la figura teniendo en cuenta que las rectas l y m son paralelas.



En la figura se tiene que: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$ por ser opuestos por el vértice.

Luego, el valor de los ángulos se halla mediante la ecuación:

$2x = x + 30$ Se plantea la ecuación.

$x = 30$ Se despeja x.

Por tanto, $m\measuredangle 1 = 2 \times 30° = 60°$ y $m\measuredangle 3 = 60°$.

A partir de estos valores se deduce:

$m\measuredangle 2 = 120°$ porque $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ son adyacentes y suplementarios.

$m\measuredangle 4 = 120°$ porque $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 4$ ya que son opuestos por el vértice.

$m\measuredangle 5 = 60°$ porque $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 5$ ya que son correspondientes.

$m\measuredangle 6 = 120°$ porque $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 6$ ya que son correspondientes.

$m\measuredangle 7 = 60°$ porque $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 7$ ya que son alternos externos.

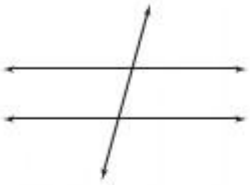
$m\measuredangle 8 = 120°$ porque $\measuredangle 6 \cong \measuredangle 8$ ya que son opuestos por el vértice.

Afianzo COMPETENCIAS

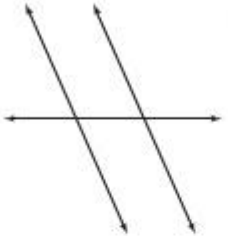
Interpreto · Argumento · Ejercito · Razono

Indica en cada figura, una pareja de ángulos para cada condición.

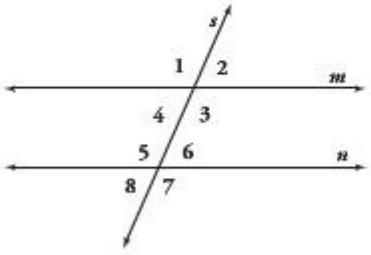
31. Correspondientes



32. Alternos externos



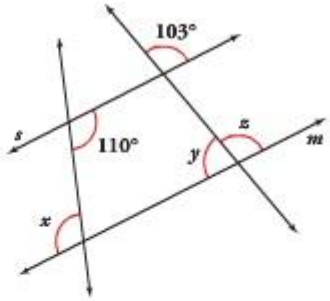
Encuentra la medida de los ángulos que se indican, a partir de la figura y de acuerdo con la información dada m y n paralelas.



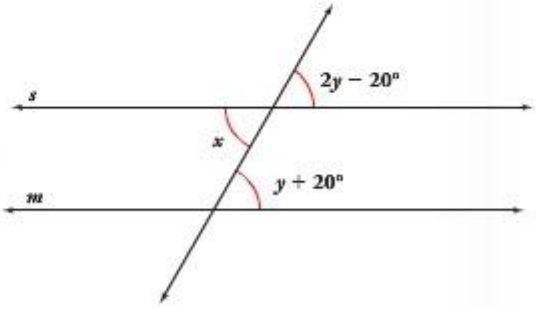
33. $m\measuredangle 3$, si $m\measuredangle 8 = 72°$.

34. $m\measuredangle 7$, si $m\measuredangle 2 = 67°$.

35. Determina las medidas de los ángulos x, y y z, sabiendo que $s \parallel m$. Justifica tu respuesta.



36. Calcula el complemento del ángulo x que se indica en la figura, si $s \parallel m$.



2. Triángulos

Ampliación multimedia Recurso imprimible

Un **triángulo** es la región del plano limitada por tres rectas que se intersecan dos a dos.

En un triángulo se identifican los siguientes elementos:

- **Vértices**: son los puntos de intersección de cada par de rectas que forman el triángulo. Los vértices se nombran con letras mayúsculas (A, B, C). Figura 1.
- **Lados**: son los segmentos determinados por dos vértices. Los lados de un triángulo se nombran con la misma letra del vértice opuesto, en minúscula (a, b, c). Figura 1.
- **Ángulos interiores**: son los que forman dos lados consecutivos ($\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$). Figura 1.
- **Ángulos exteriores**: son los ángulos adyacentes a los ángulos interiores. Figura 2.

Los triángulos se nombran con el símbolo $\triangle$ seguido por las letras que indican sus vértices.

Por ejemplo, en el triángulo que se muestra en la figura 1 se nombra como $\triangle ABC$.

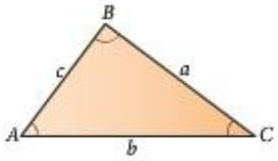
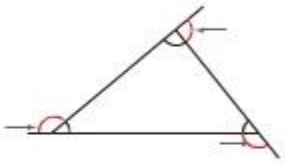


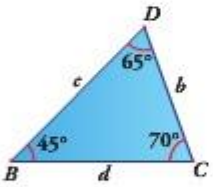
Figura 1.


Figura 2.

2.1 Propiedades de los triángulos

Todo triángulo cumple las siguientes propiedades.

1. La suma de sus tres ángulos interiores es 180°. Por ejemplo, en el $\triangle BCD$:



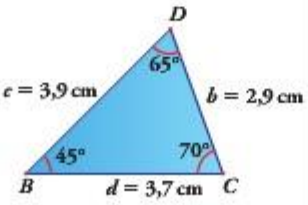
$\measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 180°$

$45° + 70° + 65° = 180°$

2. Al lado de mayor longitud se opone el ángulo de mayor amplitud, y al lado de menor longitud se opone el ángulo de menor amplitud. Por ejemplo, en el $\triangle BCD$:

Al lado de 3,9 cm se opone el ángulo de mayor amplitud 70°.

Además, al lado 2,9 cm se opone el ángulo de menor amplitud 45°.



3. La medida de cada uno de los lados es menor que la suma de las medidas de los otros dos lados. Por ejemplo, en el $\triangle BCD$ se tiene que:

$c < b + d$

3,9 cm < 2,9 cm + 3,7 cm;

$d < b + c$

3,7 cm < 2,9 cm + 3,9 cm;

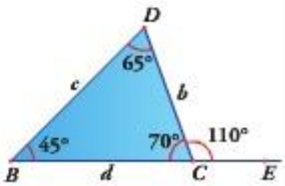
$b < c + d$

2,9 cm < 3,9 cm + 3,7 cm

4. La medida de un ángulo exterior es igual a la suma de dos ángulos interiores no adyacentes. Por ejemplo, en el $\triangle BCD$:

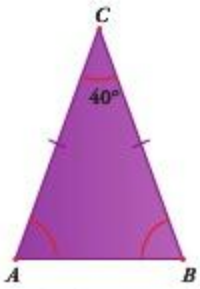
La medida del $\measuredangle ECD$ equivale a la suma de las medidas de $\measuredangle B$ y $\measuredangle D$.

$m\measuredangle ECD = m\measuredangle B + m\measuredangle D$.



EJEMPLOS

1. Encontrar la medida de los ángulos *CAB* y *ABC* del $\triangle ABC$, sabiendo que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.



Por la propiedad 2 de los triángulos, se deduce que a lados con igual medida corresponden ángulos con igual medida. Luego, se cumple: $\measuredangle CAB \cong \measuredangle ABC$.

Además, si $x = m\measuredangle ABC$, por la propiedad 1, se tiene que:

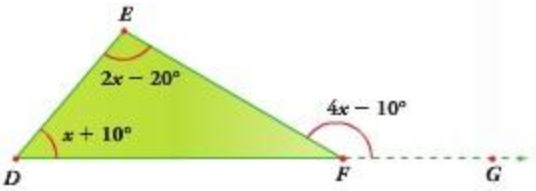
$40° + x + x = 180°$

$2x = 180° - 40°$

$x = 70°$

Por tanto, $m\measuredangle CAB = 70°$ y $m\measuredangle ABC = 70°$.

2. Determinar la medida del ángulo externo *GFE*, en el $\triangle DEF$, que aparece en la siguiente figura.



Por la propiedad 4 de los triángulos:

$m\measuredangle GFE = m\measuredangle FDE + m\measuredangle DEF$.

Luego, se remplazan $m\measuredangle GFE$, $m\measuredangle FDE$ y $m\measuredangle DEF$

$4x - 10° = x + 10° + 2x + 20°$

Después, se resuelve la ecuación.

$x = 40°$.

Luego, se remplaza el valor de x, así:

$m\measuredangle GFE = 4x - 10$

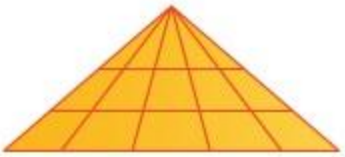
$m\measuredangle GFE = 4 \cdot 40° - 10° = 160° - 10° = 150°$

Por tanto, la medida de $\measuredangle GFE$ es 150°.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Soluciono problemas • Razono • Modelo

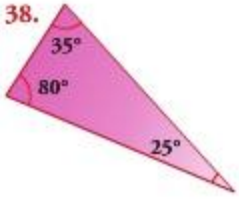
Observa la figura. Luego, resuelve.



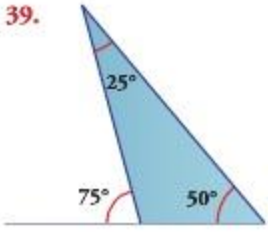
37. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

Determina si los siguientes triángulos tienen las medidas correctas. Justifica tu respuesta.

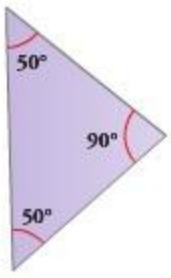
38.



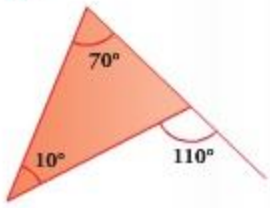
39.



40.



41.



Verifica si es posible construir los triángulos con las características dadas en cada caso. Justifica tu respuesta.

42. $m\measuredangle A = 46°$, $m\measuredangle B = 83°$ y $m\measuredangle C = 61°$.

43. $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $c = 8$ cm.

44. $a = 6$ cm, $b = 9$ cm y $c = 2$ cm.

R **Lee y resuelve.**

45. Calcula la medida de los ángulos interiores de un triángulo conociendo dos de los ángulos exteriores a dos lados del triángulo: 100° y 135°.

46. Calcula las medidas de los ángulos externos de un triángulo si dos ángulos internos de este triángulo miden 45° y 67°.

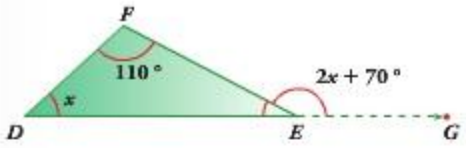
47. Calcula la medida de los ángulos interiores y los ángulos externos de un triángulo sabiendo que un ángulo externo es de 104°, y un ángulo interno no adyacente a este ángulo externo mide 32°.

48. Calcula la medida de los ángulos externos de un triángulo, si las medidas de los ángulos internos respectivamente son: x, $x + 10°$ y $x + 20°$.

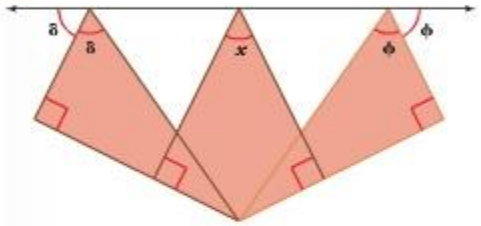
49. Uno de los ángulos internos de un triángulo mide 35°. Si la diferencia entre las medidas de los otros dos ángulos es igual a 37°, ¿cuáles son las medidas de los ángulos internos del triángulo?

M **Observa y resuelve.**

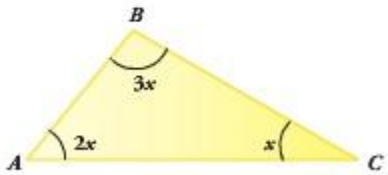
50. Determina la medida del ángulo externo relativo al vértice E del triángulo que se muestra.



51. En la figura, $\delta + \phi = 127°$. Calcula x.

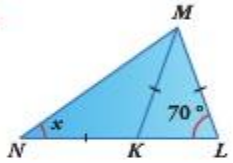


52. Determina las medidas de los ángulos interiores del $\triangle ABC$, que se muestra en la figura.

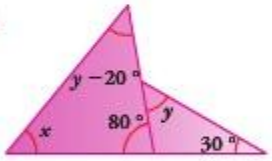


M **Calcula el valor de x en cada triángulo, aplicando las propiedades correspondientes.**

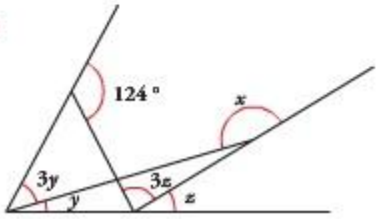
53.



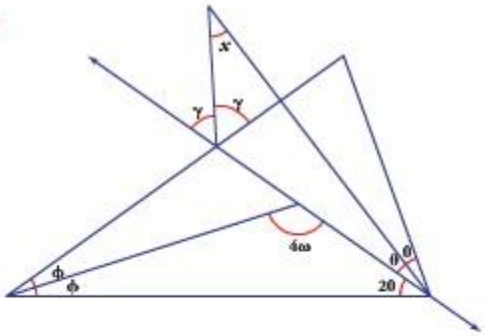
54.



55.



56.



S **Lee y resuelve.**

Un árbol de altura $\overline{AB}$ está sembrado sobre un terreno plano y horizontal. Una persona parada en un punto P de ese terreno, observa la copa del árbol A con un ángulo de medida x con respecto a la horizontal del piso. Luego, camina en línea recta hacia la base B del árbol y en un punto Q observa nuevamente el punto A con un ángulo de 60° con respecto a la horizontal.

57. Determina la medida x del $\sphericalangle QPA$, si se sabe que la medida del $\sphericalangle PAQ$ equivale a $\frac{1}{4}x$.

2.2 Clasificación de triángulos

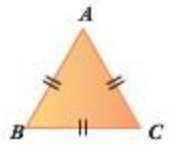
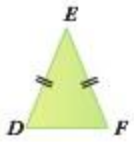
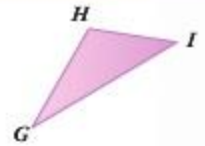
Ampliación multimedia · Actividad

Matemáticamente

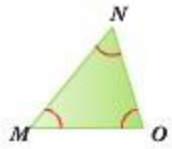
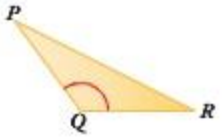
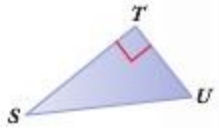
¿Por qué en la construcción de grandes estructuras se usan triángulos?



Según la medida de sus lados, los triángulos se clasifican en:

Equilátero	Isósceles	Escaleno
 Todos sus lados tienen la misma medida.	 Dos de sus lados tienen la misma medida.	 Todos sus lados tienen diferente medida.

Según la medida de sus ángulos, los triángulos pueden ser:

Acutángulo	Obtusángulo	Rectángulo
 Todos sus ángulos son agudos.	 Tiene un ángulo obtuso y dos ángulos agudos.	 Tiene un ángulo recto y dos agudos.

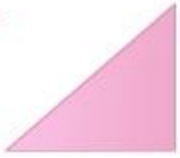
Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Soluciono problemas

Clasifica cada triángulo según la medida de sus lados y ángulos.

58.

59. 

60. 

61. 

62. 

63. 

Determina si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

64. Todo triángulo equilátero es acutángulo. ( )

65. Existe un triángulo escaleno que es isósceles. ( )

66. Existe un triángulo rectángulo isósceles. ( )

67. Un triángulo rectángulo escaleno debe tener todos sus lados de distintas medidas, y un ángulo que mide más de 120°. ( )

68. Un triángulo se puede construir, solo si se conocen las medidas de sus tres lados. ( )

Construye los triángulos y responde.

69. Un triángulo equilátero con lados de 3 cm.

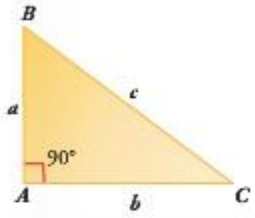
70. Un triángulo isósceles con lados de 5 cm y 7 cm.

71. ¿Cuántos posibles triángulos cumplen cada condición? Justifica.

Triángulo rectángulo

Un **triángulo rectángulo** es el que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo que mide 90°.

En todo triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.



En el $\triangle ABC$, a y b son los catetos y c es la hipotenusa.

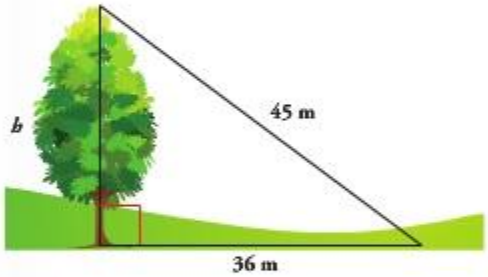
Teorema de Pitágoras

Enlace web

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos $c^2 = a^2 + b^2$.

EJEMPLOS

1. Hallar la altura b del árbol.



En la figura se observa el triángulo rectángulo que se forma. Luego, se identifican los catetos y la hipotenusa:

hipotenusa: $c = 45$ m

cateto: $d = 36$ m

cateto: b

En este caso, se requiere calcular la medida del cateto b. Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$c^2 = b^2 + d^2$

$45^2 = b^2 + 36^2$ Se remplazan los valores de c y d.

$b^2 = 45^2 - 36^2$ Se despeja b^2.

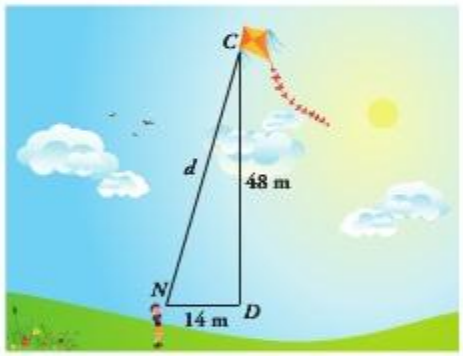
$b^2 = 45^2 - 36^2$ Se resuelven operaciones.

$b^2 = 729$

$b = \sqrt{729} = 27$ Se despeja b.

Por tanto, la altura del árbol es 27 m.

2. Calcular la distancia d del niño a la cometa.



Se identifican los catetos y la hipotenusa:

hipotenusa: d

cateto: $c = 14$ m

cateto: $n = 48$ m

En este caso, se requiere calcular la medida de la hipotenusa d. Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$d^2 = n^2 + c^2$

$d^2 = 48^2 + 14^2$ Se remplazan los valores de c y n.

$d^2 = 2.304 + 196$ Se resuelven operaciones.

$d^2 = 2.500$ Se despeja d^2.

$d = \sqrt{2.500} = 50$ Se despeja d.

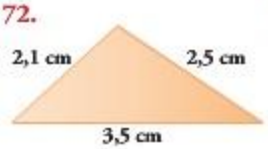
Por tanto, la distancia d del niño a la cometa es 50 m.

Afianzo COMPETENCIAS

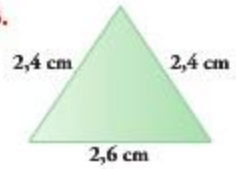
Interpreto • Argumento • Ejercito • Soluciono problemas • Razono

Indica en cada caso si el triángulo es rectángulo, a partir del teorema de Pitágoras.

72.

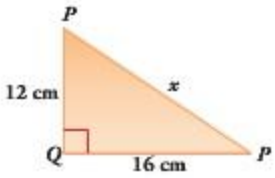


73.

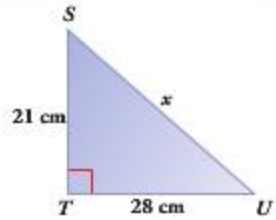


Aplica el teorema de Pitágoras para calcular el valor de x en cada triángulo.

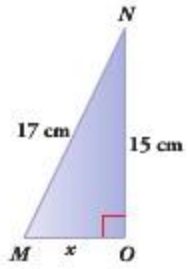
74.



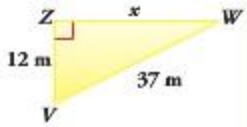
75.



76.



77.



Marca con un ✓ las medidas que corresponden a los lados de un triángulo rectángulo. Justifica tu respuesta.

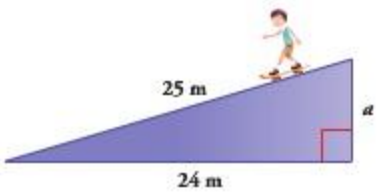
78. ☐ 18 cm, 24 cm y 30 cm.

79. ☐ 11 cm, 13 cm y 15 cm.

80. ☐ 1 cm, 1 cm y $\sqrt{2}$ cm.

81. ☐ 2 cm, $2\sqrt{3}$ cm y 4 cm.

82. Determina la altura de la rampa.



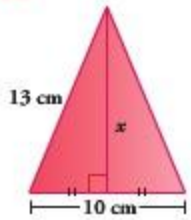
Lee y utiliza la información para encontrar cuatro ternas pitagóricas.

83. Las medidas que corresponden a los lados de un triángulo rectángulo se llaman **ternas pitagóricas**. Una estrategia para encontrar ternas pitagóricas enteras es la siguiente:

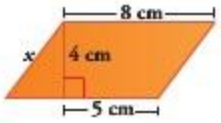
Si m y n son números naturales, si $a = n^2 - m^2$, $b = 2nm$ y $c = n^2 + m^2$, entonces, a, b y c son ternas pitagóricas.

Determina el valor de x, en cada figura.

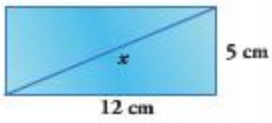
84.



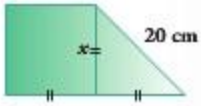
85.



86.



87.



Lee y resuelve.

88. Desde lo alto de un faro se divisa la llegada de un barco, si el alcance visual desde el faro es de 16 millas y la altura máxima del faro es 14 m, determina la distancia del barco a la orilla, como se muestra en la figura.



89. Determina si es posible pasar un espejo de forma cuadrada de 2,2 m de lado, por una puerta de 80 cm de ancho y 200 cm de alto.

2.3 Líneas y puntos notables en un triángulo

Ampliación multimedia Actividad

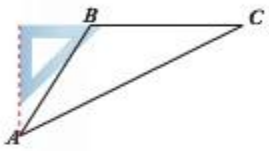
En un triángulo se pueden trazar cuatro tipos de líneas notables: alturas, medianas, mediatrices y bisectrices.

Altura y ortocentro

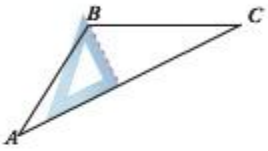
La **altura** de un triángulo es el segmento perpendicular que va desde un vértice hasta la recta que contiene al lado opuesto a este. En un triángulo se pueden construir tres alturas, una por cada vértice.

Para construir las alturas de un triángulo, se utiliza una escuadra así:

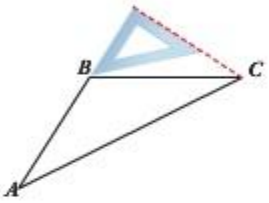
Altura desde A hasta $\overline{BC}$.



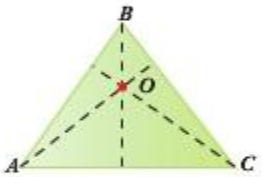
Altura desde B hasta $\overline{AC}$.



Altura desde C hasta $\overline{AB}$.



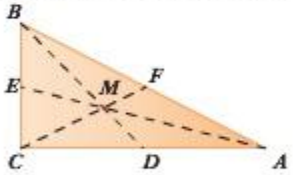
Las rectas que contienen las alturas de un triángulo se intersecan en un mismo punto llamado **ortocentro**.



Mediana y baricentro

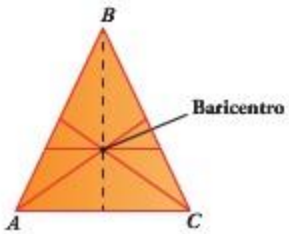
La **mediana** de un triángulo es un segmento cuyos extremos son el vértice y el punto medio del lado opuesto. Así, todo triángulo tiene tres medianas; una por cada vértice.

Para trazar las medianas de un triángulo, se ubican los puntos medios de cada lado. Luego, se trazan los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.



Las medianas de un triángulo se intersecan en un mismo punto llamado **baricentro**. En cualquier tipo de triángulo, el baricentro cumple las siguientes propiedades:

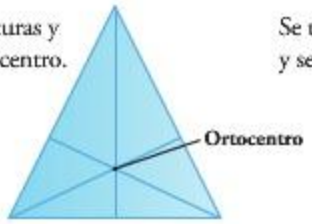
- Siempre está en el interior del triángulo.
- La longitud entre el baricentro y cada uno de los vértices equivale a $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana que contiene a dicho vértice. Por ejemplo, en la figura anterior, la medida de $CM = \frac{2}{3} CF$. Como se muestra en la figura.



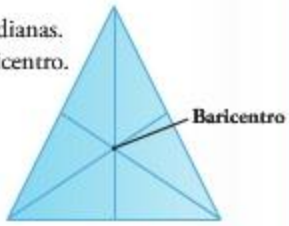
EJEMPLO

Trazar las medianas y las alturas en el siguiente triángulo isósceles. Luego, ubicar el ortocentro y el baricentro.

Se trazan las alturas y se ubica el ortocentro.



Se trazan las medianas. y se ubica el baricentro.



Por tanto, se puede observar que en un triángulo isósceles la altura trazada desde el vértice que forma los lados congruentes, coincide con la mediana trazada desde el mismo vértice.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Soluciono problemas • Razono • Propongo

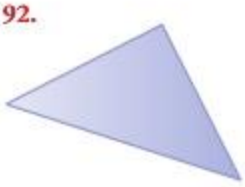
Responde. Luego, explica con un ejemplo.

90. ¿Cuáles son los extremos de las medianas de un triángulo escaleno?

91. ¿Cuáles son los extremos de las alturas de un triángulo obtusángulo?

Construye las alturas de cada triángulo. Luego, indica su ortocentro.

92.



93.



Determina el valor de verdad de los siguientes enunciados. Justifica tu respuesta.

94. El ortocentro y baricentro de un triángulo equilátero son el mismo punto.

95. Las alturas de un triángulo obtusángulo siempre se intersecan en un punto interior al triángulo.

96. Las medianas intersecan los lados del triángulo formando ángulos rectos.

Construye los siguientes triángulos, luego traza las líneas y puntos notables que se indican.

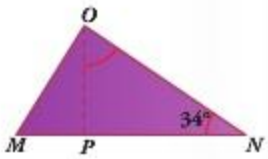
97. Rectángulo isósceles, lados iguales de 4 cm. Alturas y ortocentro.

98. Obtusángulo isósceles, ángulo obtuso 120°, lados iguales de 5 cm. Alturas y ortocentro.

99. Rectángulo, lados adyacentes al ángulo recto de medidas 2 cm y 4 cm. Medianas y baricentro.

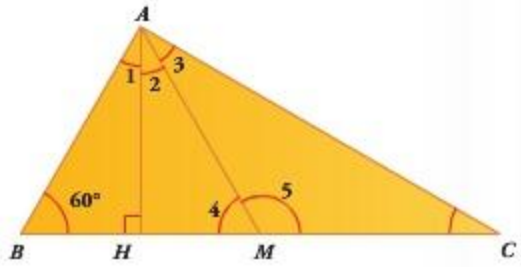
100. Isósceles, lados iguales a 3 cm, ángulo entre los lados iguales 75°. Medianas y baricentro.

101. **Calcula la medida del ángulo $\measuredangle PON$, sabiendo que $\overline{OP}$ es la altura del triángulo respecto al lado $\overline{MN}$.**



102. **Lee, observa y resuelve.**

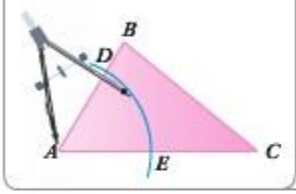
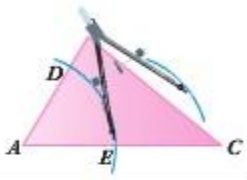
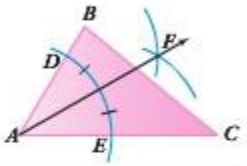
En el triángulo rectángulo BAC, se traza la altura y la mediana desde el ángulo recto A. Si $\triangle AMC$ es isósceles, calcula las medidas de los ángulos 1, 2, 3, 4 y 5 señalados en la figura.



Bisectriz e incentro

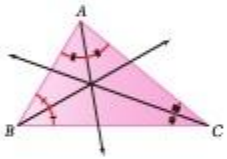
La **bisectriz** de un ángulo es una semirrecta que lo divide en dos ángulos congruentes. En el caso del ángulo interno de un triángulo, la bisectriz, puede considerarse como un segmento cuyos extremos son el vértice y un punto del lado opuesto, y que divide el ángulo en dos congruentes.

Para construir una bisectriz de un triángulo con regla y compás, se procede así:

Con centro en el vértice A se traza un arco, y se ubican D y E.	Con la misma abertura del paso anterior, se hace centro en E y se traza un arco.	Con centro en D se traza un arco y se ubica el punto F. Luego, se traza $\overrightarrow{AF}$.
		

Las bisectrices de un triángulo se intersecan en un punto llamado **incentro**.

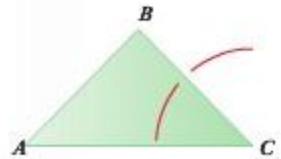
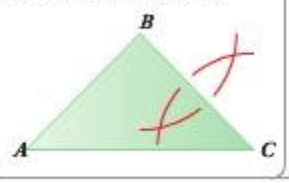
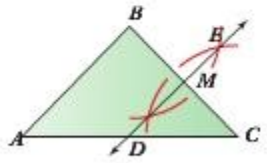
El incentro equidista de los lados del triángulo.



Mediatriz y circuncentro

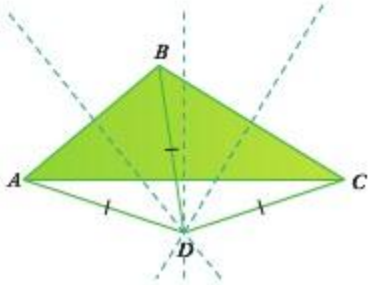
La **mediatriz** de un segmento es una recta perpendicular que pasa por su punto medio. En un triángulo se pueden trazar tres mediatrices; una por cada lado.

Las mediatrices también se pueden construir con regla y compás. Para ello, se realizan los siguientes pasos:

Con centro en C, se traza un arco, a la derecha y a la izquierda de $\overline{BC}$.	De la misma manera y conservando la abertura del paso anterior, se traza un arco con centro en B.	Se traza la recta que une los puntos de intersección de los dos arcos.
		

Las mediatrices de un triángulo se intersecan en un mismo punto llamado **circuncentro**.

El circuncentro equidista de los vértices del triángulo.



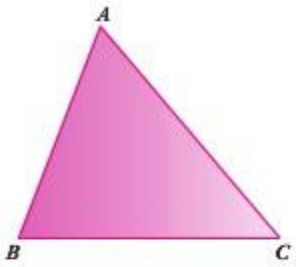
Historia de las matemáticas

Recta de Euler

La recta de Euler de un triángulo es la recta que contiene al baricentro, circuncentro y ortocentro, mas no al incentro. Se llama así en honor al matemático suizo Leonhard Euler, quien descubrió este hecho a mediados del siglo XVIII.

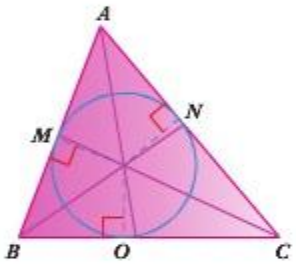
EJEMPLOS

1. Trazar una circunferencia inscrita en el siguiente el triángulo.

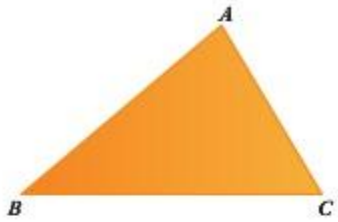


Primero, se trazan las bisectrices del triángulo.

Luego, se ubica el incentro y se traza la circunferencia.

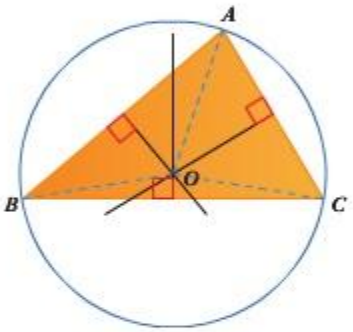


2. Trazar una circunferencia circunscrita en el siguiente triángulo.



Primero, se trazan las mediatrices del triángulo.

Luego, se ubica el circuncentro y se traza la circunferencia.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Soluciono problemas • Ejercito

Responde. Luego, explica con un ejemplo.

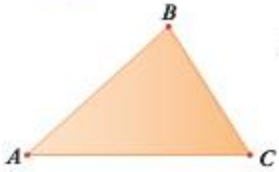
103. ¿Qué es la bisectriz de un ángulo y cómo se obtienen las bisectrices de un triángulo?

104. ¿Cómo se obtiene la mediatriz de un segmento?

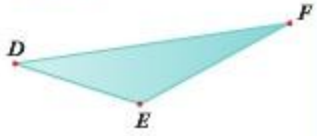
105. ¿Cuál es la importancia de determinar el incentro y el circuncentro de un triángulo?

Traza las bisectrices de cada triángulo y ubica el incentro.

106.



107.



Determina si la afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

108. En todo triángulo equilátero los puntos ortocentro, baricentro, incentro y circuncentro coinciden. ( )

109. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí. ( )

Lee, observa y resuelve.

110. Reinaldo perforará un pozo en su propiedad. El pozo debe estar situado en un punto que equidiste de la casa y los establos. Explica cómo debe proceder Reinaldo para encontrar ese punto.



3. Razonamiento deductivo

El **razonamiento deductivo** es un proceso en el cual se utiliza un principio o hecho general previamente aceptado, para obtener conclusiones en situaciones particulares.

3.1 La demostración

El razonamiento deductivo se basa en la demostración.

Una **demostración** es un conjunto de razonamientos lógicos en el que se articulan definiciones, postulados y teoremas que permiten obtener una conclusión denominada tesis.

En la siguiente tabla, se muestran los conceptos a partir de los cuales se realiza una demostración. Además, se incluye el concepto de conjetura que también hace parte del razonamiento deductivo.

Concepto	Ejemplo
Definición: es una descripción clara y precisa de las características de un objeto geométrico.	"Para dos puntos cualesquiera A y B, el segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de los puntos A y B y de todos los puntos que están entre A y B".
Postulado: es una proposición que se considera verdadero y, por tanto, no necesita demostración.	"Dados dos puntos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene".
Teorema: es una proposición lógica que puede ser demostrada. Consta de una hipótesis (lo que se supone que es cierto) y de una tesis (lo que se quiere demostrar).	"La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°".
Conjetura: es una proposición que no ha sido demostrada ni refutada, pero que se supone que es cierta. Cuando una conjetura es demostrada, entonces se convierte en un teorema.	"Todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos números primos". (Conjetura de Goldbach)

Con respecto a las definiciones y a los teoremas es importante tener en cuenta que:

- En geometría, los términos punto, recta y plano no están definidos, sino que se aceptan como términos elementales a partir de los cuales se definen otros objetos geométricos.
- Un teorema se puede escribir de la forma $p \rightarrow q$ donde p es la hipótesis y q es la tesis. Por ejemplo, el teorema "la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°", se puede escribir de la forma $p \rightarrow q$ así:

  "Si α, β y γ son las medidas de los ángulos internos de un triángulo, entonces, $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$".

Historia de las matemáticas

Euclides y el razonamiento deductivo



La obra los *Elementos*, del matemático griego Euclides (siglo III a. C.), fue el primer libro en presentar la geometría de una forma organizada, partiendo de ciertos postulados y definiciones, para demostrar teoremas a partir del razonamiento deductivo.

3.2 Generalizaciones falsas y contraejemplos

Actividad

En ocasiones, una generalización que se considera verdadera, puede ser finalmente falsa. Para mostrar que una generalización es falsa se debe presentar un **contraejemplo**, es decir, se debe mostrar un caso particular que no cumpla la generalización.

Presentar un contraejemplo que muestre que una generalización o conjetura es falsa, se conoce con el nombre de **refutar**.

Recuerda que...

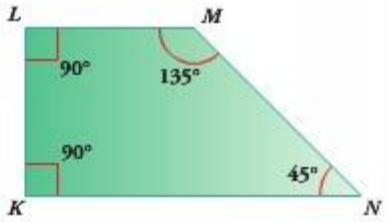
Si el $\sphericalangle A$ y el $\sphericalangle B$ son suplementarios entonces se cumple que $m\sphericalangle A + m\sphericalangle B = 180°$.

EJEMPLOS

Proponer un contraejemplo para refutar cada una de las siguientes proposiciones.

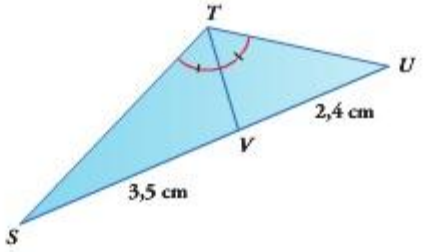
a. En todo cuadrilátero cada par de ángulos internos consecutivos son suplementarios.

Para refutar esta generalización, se construye un cuadrilátero que tenga un par de ángulos consecutivos que no sean suplementarios. Así, en el cuadrilátero $KLMN$ se tiene que los ángulos MNK y NKL no son suplementarios porque su suma no es $180°$, dado que, $m\sphericalangle MNK + m\sphericalangle NKL = 135°$.



b. En todo triángulo la bisectriz de un ángulo divide a su lado opuesto en dos segmentos congruentes.

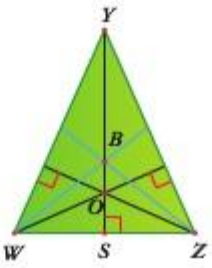
Un contraejemplo que refuta esta proposición se muestra en el siguiente triángulo.



En el $\triangle STU$ el segmento $\overline{TV}$ pertenece a la bisectriz del $\sphericalangle T$. Así, la bisectriz $\overline{TV}$ divide el $\sphericalangle T$ en dos ángulos congruentes, pero no divide al lado opuesto $\overline{SU}$ en dos segmentos congruentes, ya que $SV = 3{,}5$ cm y $VU = 2{,}4$ cm.

c. En todo triángulo isósceles el baricentro y el ortocentro coinciden.

Un contraejemplo que refuta esta proposición es el $\triangle WYZ$. En este triángulo se tiene que la mediana YS coincide con una de las alturas. Sin embargo, al trazar las otras alturas y las otras medianas se puede observar que el baricentro B y el ortocentro O no coinciden en el mismo punto.



3.3 Método directo de demostración

Ampliación multimedia

Para demostrar un teorema aplicando el método directo se realizan los siguientes pasos:

Primero, se determinan claramente la hipótesis y la tesis del teorema que se va a demostrar.

Segundo, se realiza una construcción geométrica a partir de la hipótesis y la tesis. En esta se incluyen las construcciones auxiliares que apoyen la demostración del teorema.

Luego, se relaciona la hipótesis con las definiciones, postulados y teoremas demostrados anteriormente, para establecer una sucesión lógica de proposiciones que permitan comprobar la validez de la tesis. Generalmente, este paso de la demostración se presenta en dos columnas: en la primera, se escriben las proposiciones verdaderas que permiten comprobar la validez de la tesis, y en la segunda, se escribe la justificación correspondiente.

Finalmente, se afirma la tesis.

EJEMPLO

Demostrar el siguiente teorema aplicando el método directo.

"En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos".

Primero, se determina claramente la hipótesis y la tesis escribiendo el teorema de la forma $p \rightarrow q$ así:

Si en un $\triangle ABC$ el $\sphericalangle CBP$ es externo, entonces $m\sphericalangle A + m\sphericalangle C = m\sphericalangle CBP$.

Segundo, se realiza una construcción geométrica a partir de la hipótesis y de la tesis. Para esto se construye un $\triangle ABC$ y se prolonga el lado $\overline{AB}$ para formar el $\sphericalangle CBP$ externo, como se muestra en la figura 3.

Luego, se comprueba la validez de la tesis.

Afirmación	Justificación
1. El $\sphericalangle CBP$ es un ángulo externo del $\triangle ABC$.	Hipótesis
2. $m\sphericalangle A + m\sphericalangle B + m\sphericalangle C = 180°$	Suma de los ángulos internos del $\triangle ABC$.
3. $m\sphericalangle B + m\sphericalangle CBP = 180°$	Definición de ángulos suplementarios.
4. $m\sphericalangle A + m\sphericalangle B + m\sphericalangle C = m\sphericalangle B + m\sphericalangle CBP$	Propiedades de la igualdad en 2 y 3.
5. $m\sphericalangle A + m\sphericalangle C = m\sphericalangle CBP$	Propiedad uniforme de la igualdad en 4. Se resta la medida del $\sphericalangle B$ en ambos miembros de la igualdad.

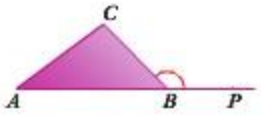


Figura 3.

Finalmente, se afirma la tesis. Como en el $\triangle ABC$ se cumple que:

$m\sphericalangle A + m\sphericalangle C = m\sphericalangle CBP$, entonces se concluye que en un triángulo la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos.

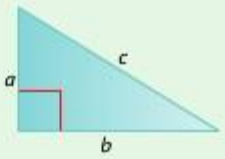
Demostración del teorema de Pitágoras

Ampliación multimedia

El teorema de Pitágoras se puede demostrar aplicando el método directo de demostración.

Teorema de Pitágoras

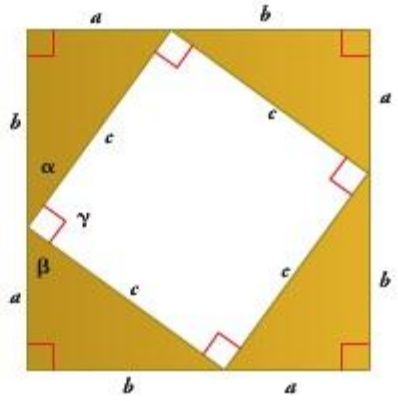
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Para demostrar el teorema de Pitágoras se realizan los siguientes pasos:

Primero, se construye un cuadrado de lado $a + b$, en él se trazan cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b, como se muestra en la siguiente figura.



Segundo, se tiene que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y como α y β son ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces su suma es igual a 90°. Por tanto, $90° + \gamma = 180°$, de donde se deduce que $\gamma = 90°$.

Tercero, el cuadrilátero formado por las hipotenusas de los cuatro triángulos rectángulos es un cuadrado porque la medida de su lado es c y sus ángulos internos son rectos.

Cuarto, el área de cada uno de los triángulos rectángulos es $A_T = \frac{ab}{2}$ y el área del cuadrado menor es $A_C = c^2$.

Luego, el área del cuadrado mayor A_M es igual a la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos más el área del cuadrado menor. Por tanto, se realizan los siguientes pasos:

$A_M = A_C + 4A_T$	Se plantea la igualdad entre las áreas.
$(a + b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$	Se remplazan las áreas.
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$	Se resuelve la potencia y se simplifica.
$a^2 + b^2 = c^2$	Se resta $2ab$ en ambos miembros de la igualdad.

Finalmente, se afirma la tesis. En todo triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Razono

Determina si las siguientes proposiciones son definiciones, postulados o teoremas. Explica tu respuesta.

111. Si dos rectas se intersecan, lo hacen en un único punto.

112. Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.

113. Si dos rectas son perpendiculares, entonces forman ángulos rectos.

114. Por un punto exterior a una recta se puede trazar exactamente una recta paralela a la recta dada.

115. Si dos rectas son cortadas por una secante de manera que los ángulos alternos externos son congruentes, entonces esas rectas son paralelas.

Escribe un contraejemplo para cada una de las siguientes generalizaciones falsas. Realiza la construcción correspondiente.

116. En todo triángulo, la mediana y la mediatriz con respecto a cualquiera de sus lados, coinciden.

117. Todos los ángulos consecutivos de un triángulo son suplementarios.

118. En un triángulo isósceles, el circuncentro es un punto interior del triángulo.

119. Las medianas, las bisectrices y las alturas de un triángulo isósceles coinciden.

120. Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios.

121. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es 180°.

Identifica la hipótesis y la tesis de cada uno de los siguientes teoremas. Luego, realiza la construcción geométrica correspondiente.

122. Si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces dichas rectas son paralelas entre sí.

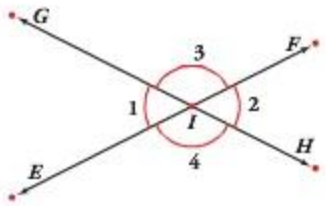
123. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

124. La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos no adyacentes.

125. La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la suma del tercer lado.

126. Completa la siguiente demostración.

Hipótesis: $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{EF}$ se intersecan en el punto I.

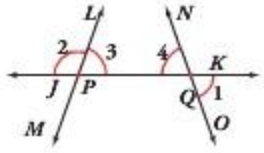


Tesis: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$; $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$.
Demostración:

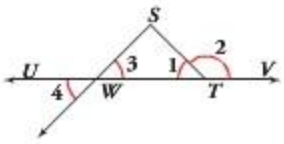
Afirmación	Justificación
$\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{GH}$ se intersecan en I.	
$\measuredangle 1$ y $\measuredangle 3$ son suplementarios.	
$\measuredangle 2$ y $\measuredangle 3$ son suplementarios.	
$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$	
$\measuredangle 1$ y $\measuredangle 4$ son suplementarios.	
$\measuredangle 2$ y $\measuredangle 3$ son suplementarios.	
$\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$	

127. Demuestra los siguientes teoremas aplicando el método directo.

Si $\overrightarrow{JK}$ interseca a $\overleftrightarrow{LM}$ y $\overrightarrow{NO}$ en los puntos P y Q, respectivamente, de tal manera que $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$, entonces $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 1$ son suplementarios.



En la figura de la izquierda, si $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 3$ son congruentes, entonces: $m\measuredangle 4 + m\measuredangle 2 = 180°$.



Demuestra los siguientes teoremas relativos a triángulos.

128. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

129. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

4. Congruencia

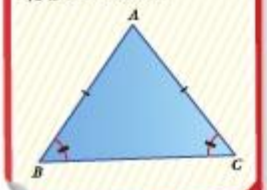
Recurso imprimible

Dos figuras son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. Cuando se superponen dos polígonos congruentes se puede observar que sus lados y sus ángulos coinciden.

Por esta razón, dos polígonos son congruentes cuando sus lados y ángulos correspondientes tienen la misma medida.

Recuerda que...

Cuando en uno o más polígonos se indican con una misma marca varios elementos, es porque son congruentes. Por ejemplo, en el siguiente triángulo se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\measuredangle ABC \cong \measuredangle ACB$.



4.1 Triángulos y congruencia

Para demostrar que dos triángulos son congruentes no es necesario comprobar uno a uno que los lados y los ángulos correspondientes tienen la misma medida. Para esto, se aplican los siguientes criterios de congruencia.

Primer criterio de congruencia

Lado, lado, lado (LLL). Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes (figura 4).

Segundo criterio de congruencia

Lado, ángulo, lado (LAL). Si los dos lados de un triángulo y el ángulo formados por estos, son congruentes con dos lados de otro triángulo y el ángulo formado por estos, entonces los dos triángulos son congruentes (figura 5).

Tercer criterio de congruencia

Ángulo, lado, ángulo (ALA). Si los dos ángulos de un triángulo y el lado comprendido entre ellos, son congruentes con los correspondientes ángulos de otro triángulo y el lado comprendido entre ellos, entonces los dos triángulos son congruentes (figura 6).

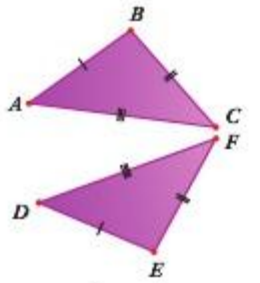


Figura 4.

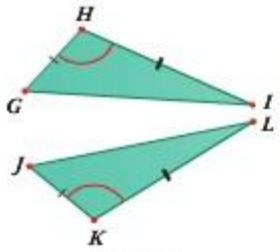


Figura 5.

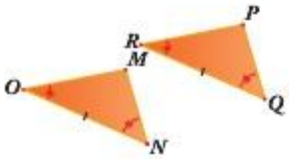
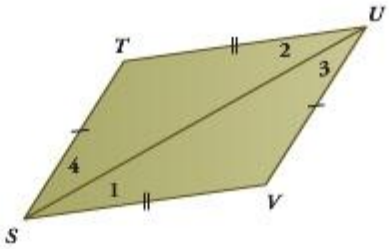


Figura 6.

EJEMPLO

Explicar por qué en el paralelogramo $STUV$ el $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ y el $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$ aplicando uno de los criterios de congruencia de triángulos.



Primero, se tiene, según la figura, que $\overline{TU} \cong \overline{VS}$ y que $\overline{VU} \cong \overline{TS}$.

Segundo, se cumple que $\overline{SU} \cong \overline{US}$ por la propiedad reflexiva de la congruencia.

Luego, el $\triangle STU$ es congruente con el $\triangle UVS$, por el criterio *LLL* (lado-lado-lado).

Finalmente, se tiene que $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ y $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$, porque son ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

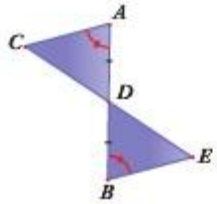
Demostraciones de congruencia

Recurso imprimible · Ampliación multimedia

Para realizar demostraciones relacionadas con la congruencia de triángulos se aplican los tres criterios de congruencia. Además, es importante tener en cuenta las definiciones, postulados y teoremas demostrados anteriormente.

EJEMPLOS

1. Demostrar la tesis a partir de la figura, aplicando el método directo de demostración.



Tesis: $\measuredangle DEB \cong \measuredangle DCA$

Primero, se establece claramente cuál es la hipótesis a partir de la figura. Por tanto, se tiene que:

Hipótesis: $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ y $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.

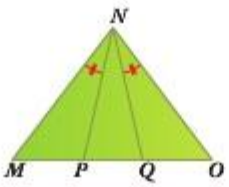
Luego, se prueba la validez de la tesis.

Afirmación	Justificación
1. $\measuredangle A \cong \measuredangle B$	Hipótesis
2. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$	Hipótesis
3. $\measuredangle CDA \cong \measuredangle EDB$	Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
4. $\triangle CDA \cong \triangle EDB$	Criterio ALA de congruencia de triángulos en 1, 2 y 3.
5. $\measuredangle DEB \cong \measuredangle DCA$	Son ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

Finalmente, se afirma la tesis. Como en la figura $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ y $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, entonces se cumple que $\measuredangle DEB \cong \measuredangle DCA$.

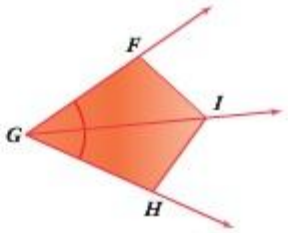
2. Establecer las afirmaciones y justificaciones correspondientes para demostrar cada tesis.

a. Hipótesis: $\measuredangle MNP \cong \measuredangle QNO$ y $\overline{MN} \cong \overline{NO}$
Tesis: $\triangle NPM \cong \triangle NQO$



Afirmación	Justificación
1. $\overline{MN} \cong \overline{NO}$	Hipótesis
2. $\measuredangle MNP \cong \measuredangle QNO$	Hipótesis
3. $\triangle MNO$ es isósceles	Definición de triángulo isósceles en 1.
4. $\measuredangle NMP \cong \measuredangle NOQ$	Son los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles.
5. $\triangle NPM \cong \triangle NOQ$	Criterio ALA en 1, 2 y 4.

b. Hipótesis:
$\overline{GI}$ **es bisectriz de** $\measuredangle HGF$ **y** $\overline{GF} \cong \overline{GH}$
Tesis: $\overline{FI} \cong \overline{HI}$



Afirmación	Justificación
1. $\overline{GI}$ es bisectriz de $\measuredangle HGF$	Hipótesis
2. $\overline{GF} \cong \overline{GH}$	Hipótesis
3. $\overline{GI} \cong \overline{GI}$	Propiedad reflexiva de la congruencia.
4. $\measuredangle HGI \cong \measuredangle FGI$	Definición de bisectriz en 1.
5. $\triangle GHI \cong \triangle GFI$	Criterio LAL de congruencia en 2, 4 y 3.
6. $\overline{FI} \cong \overline{HI}$	Son lados correspondientes de triángulos congruentes.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Propongo • Soluciono problemas

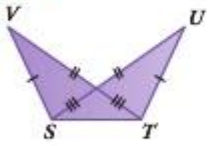
Responde.

130. ¿Cómo se distinguen dos polígonos congruentes?

131. ¿Cuál es el uso de los criterios de congruencia para triángulos?

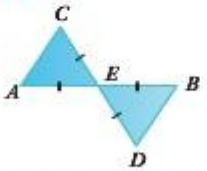
Determina el criterio de congruencia para cada par de triángulos congruentes. Luego, escribe los lados y los ángulos correspondientes que son congruentes.

132.



$\triangle STV \cong \triangle TSU$

134.



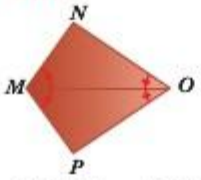
$\triangle AEC \cong \triangle BED$

133.



$\triangle HIJ \cong \triangle KIL$

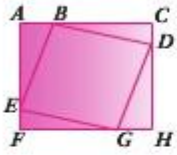
135.



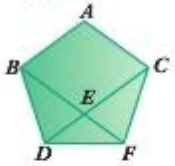
$\triangle MON \cong \triangle MOP$

Nombra los segmentos y los ángulos congruentes en cada figura.

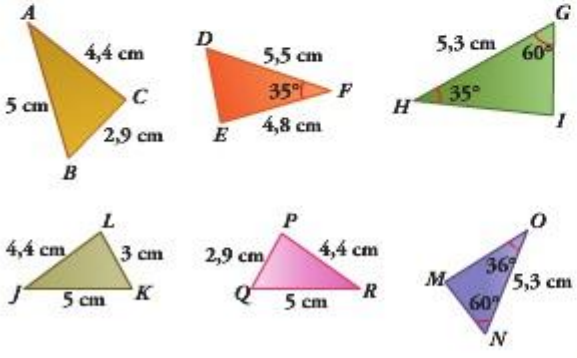
136.



137.

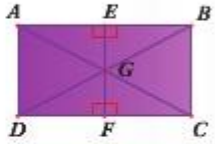


138. Identifica cuáles triángulos son congruentes. Justifica tu respuesta.

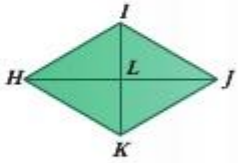


Identifica una pareja de triángulos congruentes en cada figura. Luego, determina el criterio de congruencia.

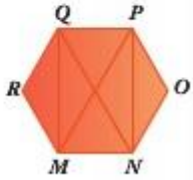
139. E es punto medio de $\overline{AB}$.



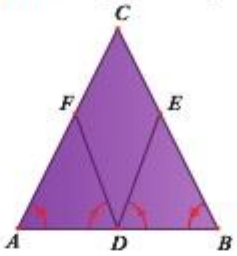
140. $\overline{HJ}$ y $\overline{KI}$ son diagonales del rombo.



141. $MNOPQR$ es un hexágono regular.



142. Completa la siguiente demostración.



Hipótesis: $\measuredangle A \cong \measuredangle B$

$\measuredangle ADF \cong \measuredangle BDE$

D es el punto medio de $\overline{AB}$.

Tesis: $\triangle ADF \cong \triangle BDE$

Afirmaciones	Justificaciones
$\measuredangle A \cong \measuredangle B$	
$\measuredangle ADF \cong \measuredangle BDE$	
D es el punto medio de $\overline{AB}$.	
$\overline{AD} \cong \overline{BD}$	
$\triangle ADF \cong \triangle BDE$	

Responde.

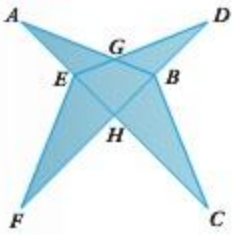
143. ¿Cuántos triángulos se pueden formar tal que $AB = 3$ cm y $BC = 7$ cm?

144. ¿Cuántos triángulos existen si $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm y $m\measuredangle A = 40°$?

145. ¿Cuántos triángulos existen si $m\measuredangle A = 30°$ y $m\measuredangle B = 90°$?

Realiza las siguientes demostraciones.

146.



Hipótesis: $\measuredangle EFH \cong \measuredangle HCB$

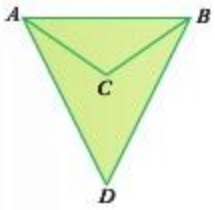
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

H punto medio de $\overline{FD}$ y $\overline{AC}$

Tesis:

$\overline{EF} \cong \overline{BC}$

147.



Hipótesis:

$\overline{AD} \cong \overline{BD}$, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

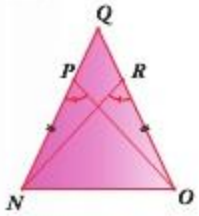
Tesis:

$\measuredangle DAC \cong \measuredangle DBC$

Lee, observa y resuelve.

De acuerdo con cada figura, identifica los triángulos congruentes. Luego, escribe la hipótesis y la tesis. Por último, realiza la demostración correspondiente.

148.



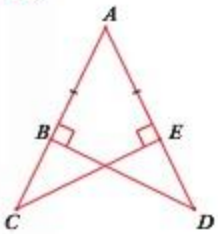
Hipótesis: _____

_____

Tesis: _____

_____

149.



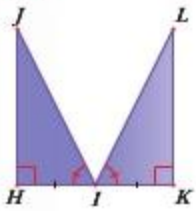
Hipótesis: _____

_____

Tesis: _____

_____

150.



Hipótesis: _____

_____

Tesis: _____

_____

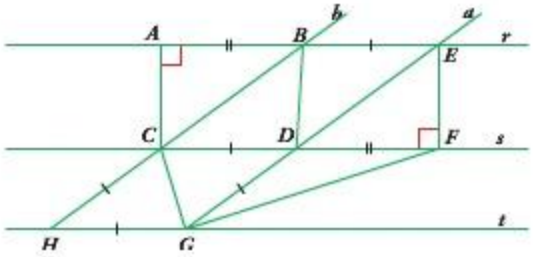
Lee cada enunciado. Luego, realiza la representación y la demostración de cada uno de los siguientes teoremas.

151. La altura a la base de un triángulo isósceles es la bisectriz del ángulo correspondiente al vértice opuesto a la base.

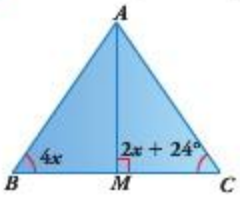
152. Las medianas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

153. CE es perpendicular a AB en D, $\overline{AD}$ $\overline{DB}$. Demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

154. Observa la siguiente figura. Luego, identifica los triángulos congruentes, señalando el criterio que sustenta la congruencia. $(a \| b, r \| s \| t)$.



Observa la figura. Luego, resuelve.



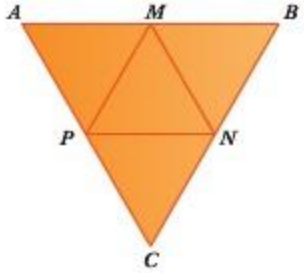
M es el punto medio de $\overline{BC}$.

155. Demuestra que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$.

156. Determina la medida de $\measuredangle ACM$.

Lee, observa y resuelve.

157. Si M, N y P son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ del triángulo equilátero ABC, muestra que el triángulo MNP es equilátero.



5. Longitud y área

La **longitud** es un atributo de los objetos, que se mide en una sola dimensión. Por ejemplo, el largo, el ancho, el alto y la distancia entre dos puntos, son longitudes. En cambio, el **área** es la medida de una superficie.

5.1 Unidades de longitud

Actividad

La principal unidad de medida de longitud en el Sistema Métrico Decimal es el **metro**, que se simboliza con la letra m. A partir del metro se definen otras unidades mayores que se denominan múltiplos del metro, y otras unidades menores que se denominan submúltiplos del metro, cuya equivalencia se muestra en la siguiente tabla.

Matemáticamente

¿Por cuál número se debe multiplicar una medida expresada en kilómetros para convertirla a milímetros?

	Nombre	Símbolo	Equivalencia en metros
Múltiplos	Kilómetro	km	1.000
	Hectómetro	hm	100
	Decámetro	dam	10
	Metro	m	1
Submúltiplos	Decímetro	dm	0,1
	Centímetro	cm	0,01
	Milímetro	mm	0,001

En el Sistema Métrico Decimal, cada unidad de medida es 10 veces mayor que la unidad inmediatamente inferior. Para convertir una medida expresada en una determinada unidad, a una unidad inmediatamente inferior, se multiplica por 10. Si por el contrario, se requiere convertir una medida expresada en una determinada unidad, a una unidad inmediatamente superior, se divide entre 10.

EJEMPLOS

1. Leer cada situación. Luego, responder.

a. Un automóvil recorrió 13,5 km, ¿cuántos decámetros recorrió en total?

Se multiplica por 100:

$$13{,}5 \times 100 = 1.350$$

Por tanto, el automóvil recorrió 1.350 dam.

b. La rana más pequeña del mundo mide en promedio 7,7 mm, ¿cuál es la longitud de esta rana en centímetros?

Se divide 7,7 entre 10: $7{,}7 \div 10 = 0{,}77$.

Por tanto, esta rana mide en promedio 0,77 cm.

2. Se quiere rodear con una cuerda una pista circular como la que se muestra en la figura. Si cada metro de cuerda cuesta $700, ¿cuánto dinero se necesita para rodear la pista?



Primero, se deben convertir 12 dam a metros así:

$$12 \times 10 = 120 \text{ m}$$

Luego, se calcula el perímetro de la pista y se multiplica por 700.

$$C = 2\pi r = 2\pi(120) \approx 754 \text{ m}$$

Finalmente, se multiplica por 700, para hallar el costo total de la cuerda.

$$754 \times 700 = 527.800$$

Por tanto, el costo total de la cuerda es de $527.800.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Soluciono problemas • Razono • Ejercito

Responde. Luego, explica con un ejemplo.

158. ¿Cuál es el procedimiento para convertir una unidad a una unidad inferior?

159. ¿Por cuál número se debe dividir para convertir una unidad a una unidad superior?

Completa el proceso para realizar las conversiones que se indican.

160. 3 km = 3×10^3 m = _____ m

161. 6,8 dam = _____ dm = _____ dm

162. 789 cm = _____ dam = _____ dam

163. 45,89 hm = _____ m = _____ m

164. 897,3 cm = _____ hm = _____ hm

165. 4,78 m = _____ mm = _____ mm

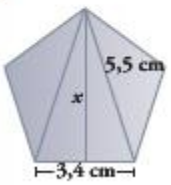
166. 654,9 mm = _____ m = _____ m

167. Completa la tabla, expresando cada medida de longitud en la unidad que se indica.

km	dam	m	cm
			85
		23,4	
	980,05		
3,5			
	4.567		
			45,6
		34,58	

Calcula la medida de x en metros que aparece en cada figura. Justifica tu respuesta.

168.

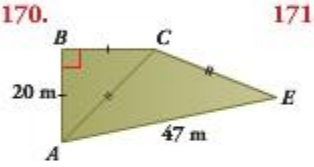


169.

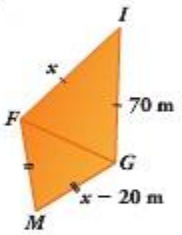


Halla el perímetro de cada figura, a partir de las condiciones dadas.

170.

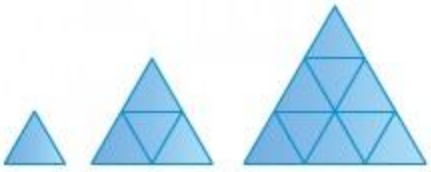


171.



172. Lee, observa y resuelve.

Cada triángulo se forma por la composición de triángulos equiláteros idénticos. Ten en cuenta la secuencia y halla el perímetro del triángulo formado por 64 triángulos equiláteros de 1 cm de lado.



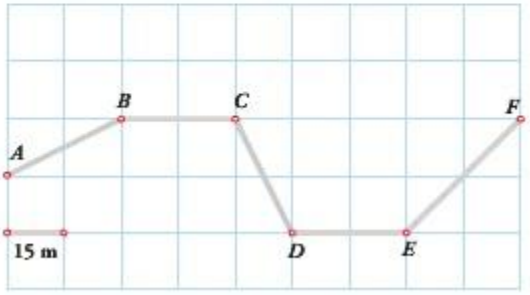
Lee y resuelve.

Un móvil A recorre 85 km en una hora, un móvil B recorre 41.255 m en una hora, un móvil C recorre 4.053 hm en una hora.



173. ¿Cuál de los tres móviles recorre más distancia en una hora?

174. Usa la cuadrícula y la información del siguiente mapa para determinar la longitud del gasoducto.



5.2 Unidades de área

Actividad

La principal unidad de medida de área en el Sistema Métrico Decimal es el **metro cuadrado**, que se simboliza m^2.

A partir de esta unidad de medida, se definen los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado.

Múltiplos				Submúltiplos		
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Para hacer conversiones entre estas unidades de medida de área se debe tener en cuenta que:

- Para convertir de una unidad de medida a otra inmediatamente inferior, se multiplica por 10^2, es decir, por 100.
- Para convertir de una unidad de medida a otra inmediatamente superior se divide entre 10^2, es decir, entre 100.

Historia de las matemáticas

El Sistema Métrico Décimal



En 1790 se inició una reforma al sistema de pesos y medidas, que estuvo a cargo de una comisión cuyo presidente fue el matemático italiano Joseph Lagrange. En esta reforma se estableció el Sistema Métrico Decimal.

Años después, en 1960, se creó el Sistema Internacional de Medidas, basado en el Sistema Métrico Decimal pero con definiciones más rigurosas de cada unidad de medida.

EJEMPLOS

1. El área de un terreno es de 4 km^2, ¿cuál es el área del terreno en metros cuadrados?

Como en el Sistema Métrico Decimal un kilómetro cuadrado es tres unidades superior que el metro cuadrado, entonces para realizar la conversión se multiplica por 10^6.

$$4 \times 10^6 = 4.000.000$$

Por tanto, el área del terreno es de 4.000.000 m^2.

2. Se va a sembrar con césped un campo de golf que tiene forma de trapecio. Sus bases miden: 49,5 dam y 10,5 dam. Si su altura es de 8 dam y sembrar un metro cuadrado de césped vale $19.500, ¿cuánto dinero se necesita para sembrar césped en todo el terreno?



Primero, como el terreno tiene forma de trapecio, su área se calcula multiplicando la altura por la semisuma de las bases.

$A = h \cdot \left(\frac{B + b}{2}\right)$ Fórmula para calcular el área de un trapecio.

$A = (8) \cdot \left(\frac{49,5 + 10,5}{2}\right)$ Se remplazan las medidas de las bases y de la altura.

$A = 240$ Se efectúan las operaciones.

Luego, se tiene que el área del terreno es de 240 dam^2.

Segundo, como el costo de sembrar el césped depende de la cantidad de metros cuadrados, entonces se deben convertir 240 dam^2 a m^2, así:

$$240 \times 100 = 24.000$$

Finalmente, se multiplica,

$19.500 \times 24.000 = 468.000.000$.

Por tanto, para sembrar césped en todo el terreno se necesitan $468.000.000.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Soluciono problemas · Razono · Ejercito

Responde. Explica con un ejemplo.

175. ¿Cómo se realiza la conversión entre unidades de área?

176. ¿Cómo se halla el área de un rectángulo?

177. ¿Cómo se halla el área de un triángulo?

Realiza las siguientes conversiones a las unidades que se indican.

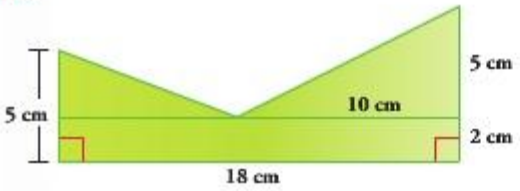
178. 20 m^2 a mm^2, cm^2 y dam^2.

179. 0,015 km^2 a dam^2, m^2 y dm^2.

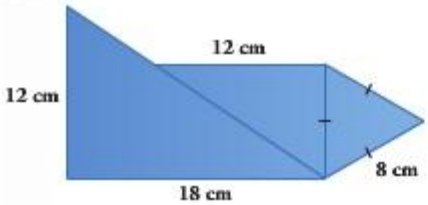
180. 32.400 cm^2 a mm^2, m^2 y hm^2.

Halla el área de las siguientes figuras.

181.

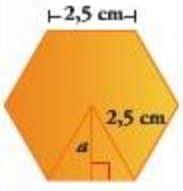


182.

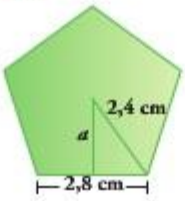


Determina el área de un polígono regular, aplicando la fórmula $A = \frac{P \times a}{2}$, donde P es el perímetro y a es la apotema. Calcula el área de cada polígono regular.

183.



184.



Lee y resuelve. Luego, justifica tu respuesta.

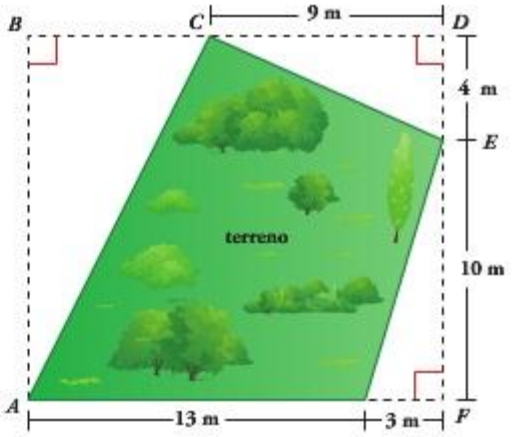
185. Una circunferencia está circunscrita en un cuadrado de 36 m^2 de área. Determina el área de la región encerrada por la circunferencia.

186. La diagonal de un cuadrado mide 5,6 cm. Halla el área del cuadrado.

187. Calcula la medida del lado de un triángulo equilátero si se sabe que su área es de $36\sqrt{3}$ cm^2.

Lee, observa y resuelve.

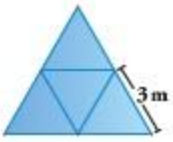
188. Para medir el área de un terreno un experto circunscribe un rectángulo en el suelo, como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es el área del terreno?



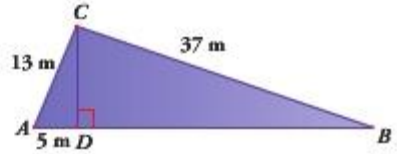
189. Juan fabrica servilleteros con triángulos equiláteros de madera cuyos lados miden 8 cm y rectángulos de 5 cm de ancho. Determina la cantidad de material necesaria para construir 10 servilleteros.



190. En la siembra de árboles frutales, se usan triángulos equiláteros de 3 m de lado, como se indica en la figura. Calcula el área total del terreno.



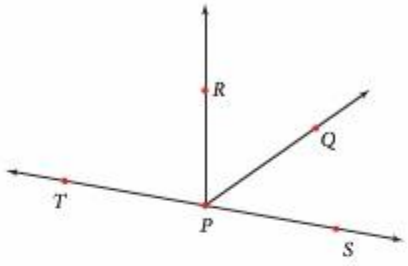
191. Se muestra el plano de un huerto de forma triangular, que se ha dividido en dos triángulos rectángulos para sembrar zanahorias y lechugas. Calcula el área del huerto.



EJERCICIOS PARA REPASAR

Ángulos

192. Nombra, en la siguiente figura, los ángulos cuyo vértice es el punto P.

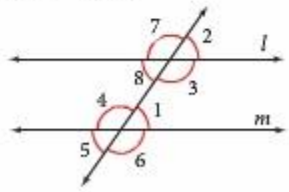


Construye con el transportador cada ángulo. Luego, clasifícalo según su medida.

193. $m\measuredangle ABC = 48°$

194. $m\measuredangle PQR = 110°$

Responde cada pregunta teniendo en cuenta que $l \parallel m$ y $m\measuredangle 1 = 70°$.

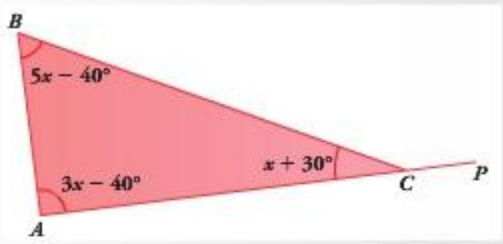


195. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle 2$?

196. ¿Cuál es la suma de las medidas del $\measuredangle 7$ y del $\measuredangle 4$?

Triángulos

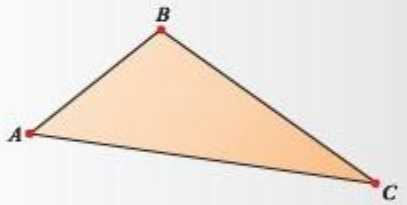
Observa el siguiente triángulo. Luego, resuelve.



197. Calcula la suma de las medidas de los ángulos internos del $\triangle ABC$.

198. Halla la medida del $\measuredangle BCP$.

199. La recta de Euler es aquella que contiene al baricentro, al ortocentro y al circuncentro de un triángulo. Traza la recta de Euler en el siguiente triángulo.



Resuelve.

200. En un $\triangle PQR$ rectángulo se tiene que $\overline{PR}$ es la hipotenusa. Si $PR = 80$ cm y la medida de uno de los catetos es el triple de la medida del otro cateto, ¿cuáles son las medidas de los catetos?

201. En un $\triangle ABC$ se cumple que $m\measuredangle A = 55°$ y $m\measuredangle PBC = 130°$, donde el $\measuredangle PBC$ es un ángulo externo del triángulo. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle B$ y del $\measuredangle C$?

Razonamiento deductivo

Escribe cada teorema de la forma $p \rightarrow q$.

202. Un triángulo equilátero es equiángulo.

_____

_____

203. Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

_____

_____

204. El complemento de dos ángulos congruentes son congruentes.

_____

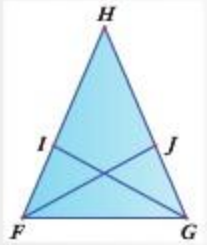
_____

Congruencia

205. Completa la tabla para demostrar la validez de la tesis.

Hipótesis: $\overline{FH} \cong \overline{GH}$ y $\overline{HI} \cong \overline{HJ}$

Tesis: $\triangle FGJ \cong \triangle GFI$ y $\triangle HFJ \cong \triangle HGI$



Afirmación	Justificación

Demuestra los siguientes teoremas en tu cuaderno.

206. En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

207. Demostrar que si una de las diagonales de un cuadrilátero biseca a dos de sus ángulos internos, entonces biseca a la otra diagonal.

Longitud y área

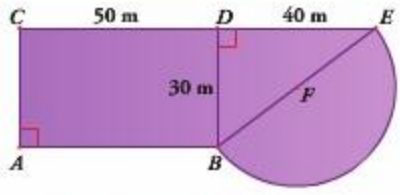
Realiza las siguientes conversiones.

208. 451 km a dm

209. 14,5 mm a dam

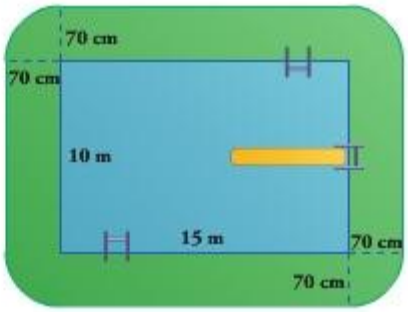
210. 258 cm^2 a hm^2

211. Calcula el perímetro de la siguiente figura en dam y el área en cm^2.



PROBLEMAS PARA REPASAR

Una piscina rectangular está ubicada en un terreno de 30 hm^2 y se encuentra rodeada por un césped de bordes circulares como se muestra en la figura. Si se incluye el área del césped como parte de la piscina, **¿cuántos metros cuadrados del terreno no forman parte de la piscina?**



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Cuántos metros cuadrados del terreno no forman parte de la piscina, si se incluye como parte de ella el área del césped?

¿Cuáles son los datos del problema?

La piscina está ubicada en un terreno de 30 hm^2 de área y sus dimensiones son 10 m de ancho y 15 m de largo. Además, está rodeada por un césped cuyos bordes circulares tiene radio de 70 cm.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se deben convertir todas las medidas a una misma unidad, para poder realizar operaciones entre ellas. En este caso, resulta conveniente convertir todas las medidas a metros.

Radio del borde circular del césped: $70 \div 100 = 0{,}7$ m

Área del terreno: $30 \times 10.000 = 300.000$ m^2.

Segundo, se tiene que el área de la piscina es $10 \text{ m} \times 15 \text{ m} = 150$ m^2.

Tercero, se puede dividir el césped en dos rectángulos de 0,7 m de ancho y 10 m de largo, dos rectángulos de 0,7 m de ancho y 15 m de largo, y los cuatro bordes circulares. Así, para calcular el área del césped se realizan los siguientes pasos:

$A_1 = 0{,}7 \times 10 = 7 \text{ m}^2$

$2A_1 = 14 \text{ m}^2$ Se calcula el área de los rectángulos de 0,7 m de ancho y 10 m de largo.

$A_2 = 0{,}7 \times 15 = 10{,}5 \text{ m}^2$

$2A_2 = 21 \text{ m}^2$ Se calcula el área de los rectángulos de 0,7 m de ancho y 15 m de largo.

$A_3 = \dfrac{(0{,}7)^2 \times \pi}{4} \approx 0{,}38 \text{ m}^2$

$4A_3 = 1{,}53 \text{ m}^2$ Se calcula el área de los cuatro bordes circulares.

$A_T = 2A_1 + 2A_2 + 4A_3 + 150$

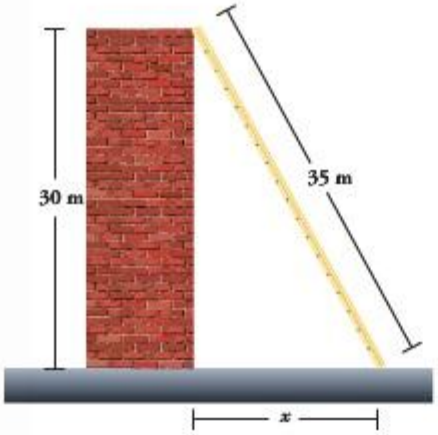
$A_T = 14 + 21 + 1{,}53 + 150 = 186{,}53 \text{ m}^2$ Se calcula el área total A_T de la piscina.

Finalmente, se resta el área del terreno y el de la piscina: $300.000 - 186{,}53 = 299.813{,}47$ m^2.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifican las conversiones de unidades y el área de cada parte de la piscina. Luego, se tiene que 299.813,47 metros cuadrados del terreno no forman parte de la piscina.

Se quiere ubicar una escalera en forma inclinada, para alcanzar una altura de 30 m desde el piso.



212. Si la longitud de la escalera es de 35 m, ¿a qué distancia x de la base del edificio se debe colocar la escalera? _____

Realiza los cálculos 213 a 215 de acuerdo con la siguiente información.

Luisa divide un terreno de forma rectangular de 5 dam de largo y 35 m ancho, en dos regiones: una parte la dispone para una piscina de forma circular y la otra para una huerta de plantas aromáticas. Si el radio de la piscina es de 15 m de diámetro, determina:

213. El perímetro y el área total del terreno.

_____

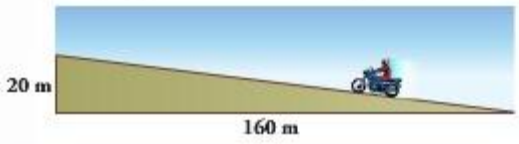
214. El perímetro y el área de la piscina.

_____

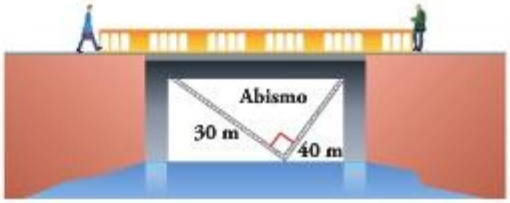
215. La cantidad de terreno que ocupará la huerta.

_____

216. Determina la distancia que recorre el motociclista en la rampa que se muestra en la figura.



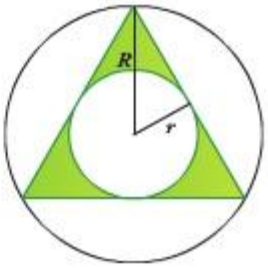
Un puente atraviesa un abismo. El puente se sostiene con dos vigas que forman un ángulo recto como se muestra en la figura.



217. ¿Qué distancia separa el abismo?

_____

218. Determina en el adorno el área de la parte rellena si $R + r = 9$ cm y el triángulo de la figura es equilátero.

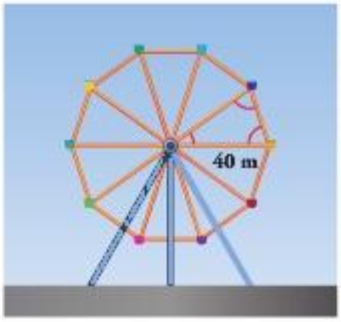


_____

_____

Resuelve las preguntas 219 a 220 de acuerdo con la siguiente información.

La rueda de Chicago tiene este nombre porque fue en esta ciudad donde se construyó la primera rueda de este tamaño y con este tipo de estructura triangular. Observa la figura y responde.



219. ¿Cuántos triángulos forman la estructura de la rueda? _____

220. ¿Cómo son estos triángulos entre sí? Justifica tu respuesta. _____

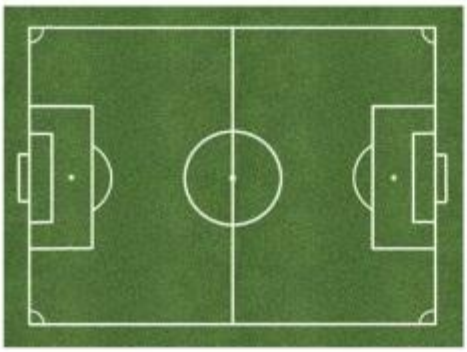
Galería de imágenes

...Para conocer las dimensiones de una cancha de fútbol.

El deporte más popular del mundo es el fútbol y es uno de los juegos más accesibles para practicarlo. En este deporte dos equipos, de 11 jugadores cada uno, juegan durante dos tiempos de 45 minutos más el tiempo de adición.

Para optimizar el rendimiento de los jugadores es necesario conocer las dimensiones del terreno donde juegan.

Las medidas de una cancha pueden variar: el largo puede estar entre 90 y 120 metros, aunque en partidos internacionales esta medida puede ser entre 100 y 110 metros; el ancho puede estar entre 45 y 90 metros y, en partidos internacionales, entre 64 y 75 metros, para evitar que la cancha sea cuadrada.



El área de meta o área chica, situada en ambos extremos del terreno de juego, se traza de la siguiente forma:

Se trazan dos líneas perpendiculares a la línea de meta, a 5,5 m de la parte interior de cada poste de meta. Estas líneas se adentrarán 5,5 m en el terreno de juego y se unirán con una línea paralela a la línea de meta. El área delimitada por dichas líneas y la línea de meta será el área de meta.

El área penal o área grande, situada en ambos extremos del terreno de juego, se forma de la siguiente manera:

Se trazan dos líneas perpendiculares a la línea de meta, a 16,5 m de la parte interior de cada poste de meta. Estas líneas se adentrarán 16,5 m en el terreno de juego y se unirán con una línea paralela a la línea de meta. El área delimitada por dichas líneas y la línea de meta será el área de penal.



En cada área de penal se marcará un punto penal a 11 m de distancia del punto medio de la línea entre los postes y equidistante a estos. Al exterior de cada área de penal se trazará, asimismo, un semicírculo con un radio de 9,15 m desde el punto penal.

Las zonas que posee el campo de juego son diversas, como área de meta, área de penales y el área total de juego que se divide en dos partes iguales por una línea.

1. **Completa los siguientes enunciados.**
   a. El largo máximo del terreno de juego para un partido internacional es _____ que equivale a _____ hm.
   b. El área mínima del campo de juego para un partido no profesional es de _____ dm^2.
   c. La diferencia entre el valor mínimo y máximo del ancho de la cancha es de 45.000_____.
   d. 915 _____ equivale a la longitud de _____.
2. **¿Cuál es el área de la zona llamada área grande o área de penal?**
3. **¿Cuál es la diferencia que hay entre el área chica y el área grande?**
4. **¿Cuáles de las figuras de la cancha de fútbol son congruentes? Explica tu respuesta.**
5. **Realiza el dibujo de una cancha de fútbol a partir de la información del texto.**
6. **Demuestra que el punto penal, se encuentra a igual distancia de los postes de meta.**
7. **¿Cuál es la distancia que hay entre el punto de tiro de esquina y el punto de tiro penal?**
8. **Investiga las dimensiones de los campos de juego del tenis, fútbol de salón, voleibol y baloncesto. Luego, halla el área de cada uno de los terrenos.**

...También sirve para organizar espacios triangulares.

Los puntos notables de un triángulo como el baricentro, incentro, ortocentro y circuncentro son de gran utilidad en arquitectura, topografía, diseño industrial e ingeniería civil cuando se requiere un aprovechamiento óptimo de un espacio triangular.



Existen múltiples situaciones en los que se debe aplicar la geometría de los puntos notables y es necesario conocer la utilidad de cada uno de ellos. Por ejemplo, si se desea construir un galpón en un lugar por donde pasan tres avenidas principales como se indica en la figura, es necesario hacerlo lo más lejos posible de ellos ya que las gallinas para empollar necesitan de un lugar lo más tranquilo y silencioso posible.

Para este caso, el lugar exacto debe equidistar de las tres avenidas principales para así evitar el ruido excesivo de alguna de ellas.

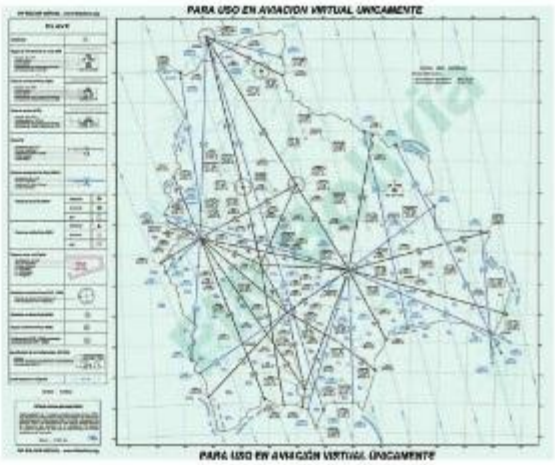


Para ello es necesario construir el incentro, que es un círculo circunscrito en el triángulo, que asegura la máxima distancia a cada una de las avenidas que sería el radio de la circunferencia.

Esta coordenada también se puede calcular numéricamente aunque geométricamente es de utilidad saber el punto exacto en el momento que se desea realizar un plano o una maqueta para la construcción del galpón.

En diseño industrial también se requiere de esta herramienta cuando se construyen objetos triangulares. Por ejemplo, si se quiere construir una mesa triangular que solo tenga una pata de soporte. En este caso es necesario encontrar el centro de masa de la mesa o baricentro para que se equilibre con un solo soporte. En este caso se halla el punto de corte de las medianas desde cada uno de los vértices.

Un punto cualquiera de la Tierra se puede ubicar, si se conoce su longitud y latitud, a partir del método de la "triangulación", el cual consiste en seleccionar puntos de la superficie terrestre que son vértices de triángulos, y así formar "redes de triángulos".



Cada vértice de estos triángulos es llamado "vértice geodésico", ya que geodesia es la ciencia que se encarga de precisar la posición de puntos sobre la superficie terrestre, como también de estudiar la forma y el tamaño de la Tierra.

1. **¿Consideras que hay una estrecha relación entre la geometría y el diseño de objetos o espacios? Explica tu respuesta.**
2. **En una oficina de forma triangular se debe ubicar el centro de una red Wi-Fi, tal que la señal sea óptima en toda la oficina. ¿En qué lugar debe ir el centro de la red?**
3. **Averigua la forma de encontrar el baricentro de un cuadrilátero. Luego, diseña un objeto en el que se necesite utilizar este concepto.**

Trabaja con GeoGebra

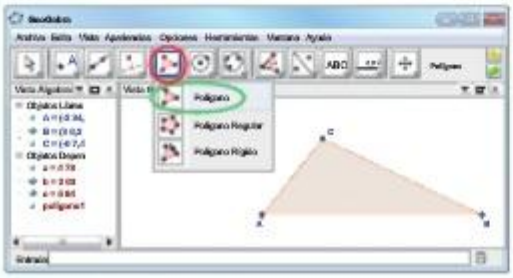
Objetivo: reconocer el lugar geométrico que se genera al trazar las alturas, medianas y mediatrices en un triángulo.

Descripción: representar con geometría dinámica la Recta de Euler, lugar geométrico generado por el ortocentro, el baricentro y el circuncentro a partir de las alturas, medianas y mediatrices, respectivamente, en un triángulo usando GeoGebra.

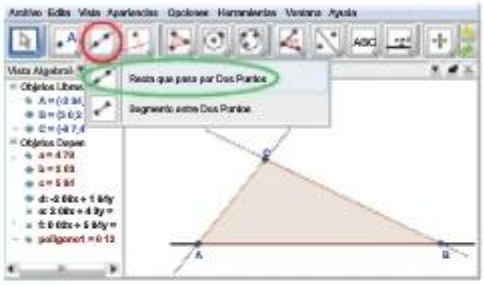
Para acceder a GeoGebra, ingresa y descarga el programa en: www.geogebra.org/cms/es

1. En el menú inicio haz clic en **GeoGebra.**

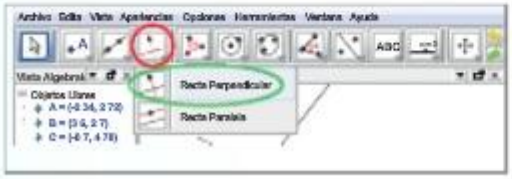
2. Haz clic en la opción **Polígono** para dibujar un triángulo *ABC*, en el menú de herramienta, como se muestra en la figura.



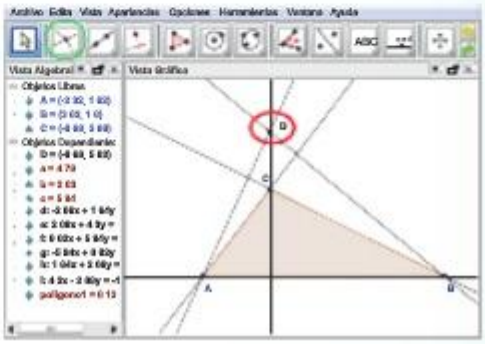
3. Selecciona **Recta que pasa por Dos Puntos,** en el menú de herramientas. Luego, traza las rectas que contienen los lados del triángulo $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



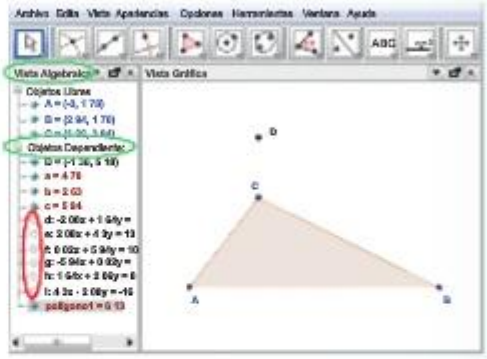
4. Haz clic en **Recta Perpendicular** para construir las rectas que contienen las tres alturas a cada vértice del triángulo.



5. Haz clic en **Intersección de Dos Objetos.** Luego, marca el punto de intersección de las tres rectas que contienen las alturas del triángulo *ABC*.



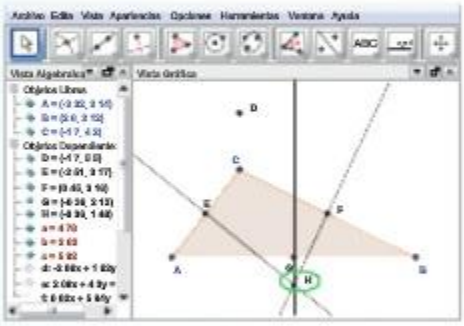
6. Ubica **Vista Algebraica.** Luego, observa la lista de **Objetos Dependientes** y haz clic en cada óvalo que se refiera a las seis rectas para ocultarlas, como se muestra en la figura.



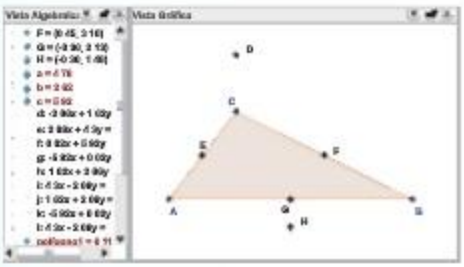
7. Ubica **Punto Medio o Centro.** Luego, haz clic en cada uno de los lados del triángulo.



8. Traza las mediatrices del triángulo, con la herramienta **Recta Perpendicular.** Luego, marca el punto de intersección.



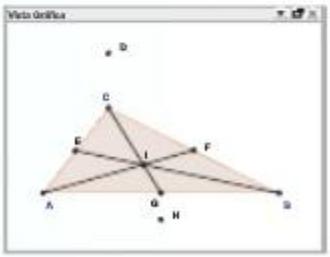
9. Repite el paso 6, para ocultar las rectas perpendiculares.



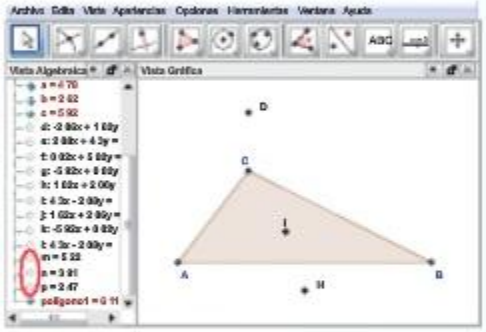
10. Haz clic en **Segmento entre Dos Puntos** para construir los segmentos de cada vértice al punto medio de su lado opuesto.



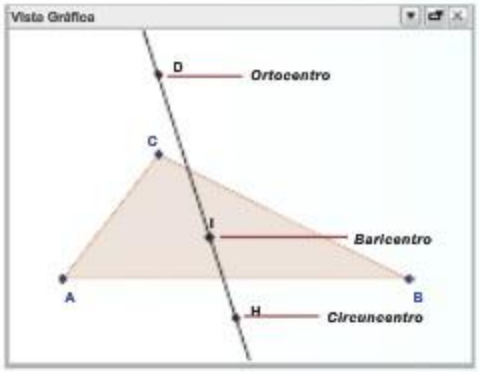
11. Traza las medianas del triángulo, con la herramienta **Segmento entre Dos Puntos.** Luego, traza los tres segmentos cuyos extremos son un vértice y el punto medio del lado opuesto. Por último marca el punto intersección.



12. Repite el paso 6, para ocultar los tres segmentos asociados a las medianas.



13. Haz clic en **Recta que pasa por Dos Puntos.** Luego, traza la recta de Euler. Es decir, la recta que contiene el ortocentro, el circuncentro y el baricentro a partir de las alturas, mediatrices y medianas, respectivamente.



14. Construye un triángulo equilátero.

    Luego, traza la recta de Euler. ¿Cómo quedan ubicados el ortocentro, circuncentro y el baricentro?

15. Construye un triángulo isósceles.

    Luego, traza la recta de Euler.

16. Construye un triángulo rectángulo.

    Luego, traza la recta de Euler. ¿En dónde quedan ubicados el ortocentro, circuncentro y el baricentro?

17. ¿Para qué tipos de triángulos, el ortocentro y el circuncentro quedan en el exterior del triángulo?



10 Estadística y probabilidad

Estándar: pensamiento aleatorio

→ Tu plan de trabajo...

- **Caracterizar variables cuantitativas** aplicando las medidas de posición y las medidas de variabilidad.
- **Aplicar la caracterización de variables cuantitativas** continuas **en la resolución de situaciones problema**.
- **Utilizar las técnicas de conteo para hallar el número de elementos de un evento** en un experimento aleatorio.
- **Calcular la probabilidad de** que ocurra un evento.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba SABER

6 Multimedia **1** Audio

1 Galería **5** Imprimibles

7 Actividades **1** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Clasifica las siguientes variables en cuantitativas o cualitativas.
   a. Marca de ropa favorita.
   b. Estatura de una persona.
   c. Género de una persona.
   d. Cantidad de artículos vendidos en una empresa.
2. Calcula la media o promedio de las calificaciones de los estudiantes que aparecen en la tabla.

Nombre	Calificación
Rodrigo	1,7
Diana	4,5
Sandra	3,8
Alex	2,9



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para determinar si el crecimiento de un bebé es el adecuado según su edad.

Los conceptos estadísticos y en particular la caracterización de variables, se aplican en diversas ciencias, entre las que se encuentra la pediatría. Así, los pediatras llevan un control de ciertas medidas relacionadas con la condición física del bebé, principalmente de su talla, su peso y su perímetro craneal, las cuales se registran en unas tablas de crecimiento que reciben el nombre de percentiles.

Lee más acerca de este tema en la página 330.

Cronología de estadística y probabilidad

Egipto. Aparecen registros estadísticos sobre la población y datos económicos con el fin de iniciar la construcción de las pirámides.



3050 a. C.

Roma. En el Imperio romano se recopilan datos estadísticos acerca de la cantidad de nacimientos, defunciones y matrimonios.

100 d. C.



1654 d. C.

Francia. Nace la teoría de la probabilidad a partir de la correspondencia entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal.

1662 d. C.

Londres. John Graunt publica su libro *Natural and political observations made upon the bills of mortality* que contiene conclusiones acerca de los nacimientos y mortalidad de los londinenses. Esta obra es catalogada como el punto de partida de la estadística moderna.

1749 d. C.

Alemania. Se utiliza la palabra *estadística* para referirse a la recolección de datos y documentos del Estado.

1670 d. C.

París. Se publica la *Apuesta de Pascal* que es una reflexión sobre la existencia de Dios basada en cálculos probabilísticos.



1819 d. C.

Bélgica. Lambert Adolphe Jacques Quételet utiliza el término "hombre promedio" para explicar las tasas de mortalidad y criminalidad.

1. Definiciones iniciales

Actividad

La **estadística** es la ciencia de la recolección y el análisis de datos, sin embargo, es importante hacer énfasis en el alcance del análisis estadístico.

Matemáticamente

¿Qué tipos de variables estadísticas existen?

En la actualidad, el mundo se mueve en torno a la información (datos). Las personas están inmersas en múltiples bases de datos.

Por ejemplo, la primera base de datos a la que pertenece un colombiano es el DANE (Departamento Administrativo Nacional de Estadística), el cual solicita a cada entidad de salud, el registro de cada "nacido vivo" en Colombia, por medio del médico que recibe el bebé en la sala de partos, de este modo se diligencia un formato que va a las bases de datos del DANE y constituye una parte de las Estadísticas Vitales.

Recuerda que...

Los registros vitales son estadísticas continuas que recogen información sobre nacimientos, defunciones fetales y no fetales, los cuales permiten contar con información que revela los cambios ocurridos en los niveles y patrones de mortalidad y fecundidad, proporcionando una visión dinámica de la población, como complemento al enfoque estático que proveen los censos.

En el certificado de cada nacido vivo, se registra la información que corresponde a los datos de los padres, sexo, fecha, hora del nacimiento y el sitio de Colombia en el que se produjo el nacimiento. Como se aprecia, a tan solo unas horas de haber nacido ya se hace parte de una importante base de datos que, posteriormente, se confirma en el Registro civil, el cual acredita a una persona como legalmente colombiana.

La estadística tiene muchas aplicaciones en varios campos, relacionados con el desarrollo de la sociedad. Teniendo en cuenta el área específica, los diferentes conceptos estadísticos tienen una aplicación en la cual cada interpretación se elabora según las características de la población o la muestra y claro, las variables que se desean estudiar.

Es común encontrar en periódicos, revistas y, en general, en medios de información, titulares o frases como las siguientes:

Los cupones de descuento, cada vez más populares y utilizados por los consumidores.

Varios estudios han mostrado que los consumidores siguen a las marcas en los medios sociales con el objetivo de obtener algún tipo de beneficio, especialmente cupones de descuento y ofertas.

Un estudio encontró que el 80,6% de los consumidores reportaron el uso de cupones, algunas veces (33,2%), muy a menudo (34%) o siempre (13,4%), mientras un 14% dijo utilizarlos rara vez.

La junta directiva del Banco de la República subió la tasa de intervención de la entidad en 0,25 puntos, para situarla en 5,25 por ciento.



TOTAL DE PASAJEROS DIARIOS

1.573.972

TOTAL DE PASAJEROS POR LINEA





El total de pasajeros diarios equivale a casi la mitad de la población de la ciudad, con la cual se logra una comunicación más eficiente y se obtiene masividad y segmentación.

Para recolectar información estadística, se crea una base de datos, para lo que es indispensable elaborar instrumentos de recolección como los sondeos y las encuestas. Estas permiten conocer los gustos, preferencias, niveles numéricos, talla, peso, aficiones, entre otras variables de la población que se desea estudiar.

En la actualidad, existen muchas estrategias para crear bases de datos: sondeos por Internet, encuestas telefónicas, formularios para las EPS o las ARP; en fin, todo medio por el cual se suministre información a terceros es un instrumento ideal para formar una base de datos.

Una forma de recolectar información consiste en llenar cupones en los almacenes de cadena. Este tipo de modelo de recolección de información proporciona a las diferentes marcas datos de sus clientes e, incluso, en la mayoría de los casos, aspectos confidenciales como números de teléfonos y dirección de residencia.

Las bases de datos constituyen en la actualidad la mayor y más grande fuente de información de toda índole en el mundo.

Para formar una base de datos, ya sea grande o pequeña, se deben tener en cuenta las variables que se desea estudiar y que se relacionen con el estudio que se pretende realizar.

Historia de las matemáticas

Inicio de la estadística

Los inicios de la estadística están claramente registrados en los monumentos de la cultura egipcia. En dichos monumentos se ha podido establecer que, hacia el año 3050 a. C., los faraones ordenaban recopilar datos de la población, número de esclavos y cantidad de riquezas, con el fin de organizar la construcción de las pirámides.



1.1 Estudios estadísticos

En algunas ocasiones, los datos necesarios para cierta aplicación no se pueden conseguir con facilidad o en bases de datos ya construidas. En estos casos, la información se obtiene a partir de la realización de un estudio estadístico. Estos estudios son denominados experimentales u observacionales.

En un estudio experimental, se deben identificar las variables de interés e identificar cómo varían ante determinados cambios.

Por ejemplo, si una nutricionista desea saber cómo influye la ingestión de un nuevo producto en la baja de peso de pacientes con niveles altos de azúcar, podría pedir a un grupo de ellos que consuman el producto durante un determinado lapso de tiempo; a la vez, podría controlar, en condiciones similares, a otros pacientes que no necesariamente ingieran el nuevo producto. Es muy probable que al final de la prueba, la profesional pueda sacar algunas conclusiones sobre la ingestión del producto en los pacientes con niveles altos de azúcar.

Sin embargo, y aunque es muy clara la importancia y la utilidad de las estadísticas, es necesario tener mucho criterio en la interpretación de la información. Muchas personas hacen deducciones que los involucran en los resultados estadísticos cuando, de hecho ni siquiera pertenecen a la población estudiada.

Por ejemplo, si la conclusión de un estudio estadístico es que el uso frecuente de cámaras de bronceo por parte de mujeres de origen oriental aumenta la probabilidad de padecer cáncer de piel, no se puede asumir como conclusión que todas las mujeres que alguna vez han ido a una cámara de bronceo padezcan cáncer de piel.

En esta última afirmación hay varias malas interpretaciones de las estadísticas.

Este ejemplo nos plantea algo muy importante en la estadística y es la inferencia. Es necesario identificar y aplicar las herramientas para caracterizar variables y para mejorar el nivel de inferencia frente a las bases de datos, pero el análisis y el planteamiento de conclusiones es un proceso que se debe mejorar en la medida que se conocen más la población o muestra y las características específicas de la investigación.

2. Caracterización de variables cuantitativas para datos no agrupados

Ampliación multimedia

La caracterización de las variables cuantitativas se realiza teniendo en cuenta la forma agrupada de presentar la información en:

- Tablas de distribución de frecuencias.
- Histogramas.
- Polígonos y ojivas.

Para plantear la caracterización de variables cuantitativas, se examina el comportamiento de cada uno de los datos. A este estilo de caracterización se le denomina **caracterización en forma no agrupada**.

Para caracterizar una variable cuantitativa en forma no agrupada, se usan las medidas de localización y las medidas de dispersión:

- De localización: media, mediana, moda, percentiles, cuartiles, deciles,
- De dispersión: varianza, desviación estándar.

> ***Recuerda que...***
> Las medidas de localización central también son llamadas medidas de tendencia central.

Las medidas numéricas de localización y dispersión se calculan a partir de los n valores de los datos. Si el conjunto de datos tiene más de una variable, estas medidas se calculan por separado para cada una de ellas.

Si las medidas tomadas se calculan a partir de una muestra reciben el nombre de **estadísticos de la muestra**; si estas medidas se calculan tomando como base los datos de una población se denominan **parámetros poblacionales**.

2.1 Media, mediana y moda

Recurso imprimible

La media, la mediana y la moda son las tres medidas de localización central. En términos generales, estas medidas permiten determinar la posición de un valor respecto a un conjunto de datos; en esencia, este dato se considera como representativo o típico dentro del conjunto de observaciones.

Media

La medida de localización central más importante y más usada es la denominada **media aritmética**. Se calcula teniendo en cuenta cada uno de los valores x_i de la población o muestra. Si la media es tomada en una población, se representa con la letra μ; y si es tomada de una muestra, se representa con la letra $\bar{x}$.

Así, la fórmula para calcular la media es:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ (muestral)}$$

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} \text{ (poblacional)}$$

Es importante mencionar que si bien la media proporciona un dato que es representante de la muestra o población, a veces no se presenta como el mejor descriptor de ella.

Por ejemplo, si con el estudio obtenido de una encuesta aplicada en un sector de un estrato bajo de una ciudad se determina que el consumo de leche, por familia, es en promedio dos litros por semana, se está representando una gama de consumos que va desde las familias que no consumen nada de leche hasta las que consumen más de dos litros semanales. Con lo cual la media no sería un buen descriptor del total de las observaciones.

Mediana y moda

La **mediana**, representada por $\tilde{x}$, es una medida que divide la muestra o población ordenada, en dos partes porcentualmente iguales.

- Para un número impar de datos ordenados $\tilde{x}$ es el valor central.
- Para un número par de datos ordenados $\tilde{x}$ es el promedio de los dos valores centrales.

La **moda**, representada por $\hat{x}$, es el valor de los datos que se presenta con mayor frecuencia.

EJEMPLO

Los 10 atletas que forman el equipo olímpico en pruebas de velocidad entrenan para mejorar sus tiempos en la prueba de los 200 metros planos. El entrenador mide sus tiempos en el último entrenamiento de la semana. A continuación se presentan dichos resultados.



20,3 s	**21,45 s**	**20,05 s**	**19,98 s**	**25,56 s**
20,01 s	**19,99 s**	**21,32 s**	**20,88 s**	**21,23 s**

Determinar las medidas de tendencia central y hacer una interpretación de ellas.

Para el caso, las observaciones corresponden a una población pues se están tomando los datos de los 10 integrantes del equipo. Con lo cual se tiene que:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$= \frac{20,3 + 21,45 + 20,05 + 19,98 + 25,56 + 20,01 + 19,99 + 21,32 + 20,88 + 21,23}{10}$$

$$\mu = 21,077 \text{ s}$$

Ahora, el conjunto de datos ordenados es:

19,98 19,99 20,01 20,05 20,3 20,88 21,23 21,32 21,45 25,56

Así que $\tilde{x}$ es el promedio de los dos datos centrales:

$$\tilde{x} = \frac{x_5 + x_6}{2}$$

$$\tilde{x} = \frac{20,3 + 20,88}{2} = 20,59 \text{ s}$$

Como no hay ningún dato con frecuencia mayor a 1, se dice que la moda no existe. Se puede afirmar que el promedio de los atletas es de 21,077 s, sin embargo, el tiempo 25,56 s hace que este valor no sea significativo. Es decir, no es un representante completamente confiable de la muestra. Aunque no se puede considerar como un dato atípico dicho valor sí afecta el promedio de todos los atletas.

En este caso, se debe indagar cuál fue la condición particular que hizo que este atleta tuviera un tiempo muy diferente a los otros 9.

2.2 Percentiles

Actividad

Los **percentiles** son los valores de la variable que dividen a un conjunto ordenado de los datos en 100 partes porcentualmente iguales.

Son 99 y se notan con la letra p: $p_1, p_2, p_3, \cdots p_k, p_{k+1}, \cdots p_{99}$

> ***Ten en cuenta que...***
> Los percentiles, los deciles y los cuartiles son llamados medidas de posición y se usan para describir la posición que tiene un dato específico en relación con todos los datos de la muestra.

Se dice que el k-ésimo percentil p_k es un valor tal que a lo más el k% de los datos es menor que él y a lo más $(100 - k)$% es mayor que él.

Un caso muy común del uso de los percentiles son las curvas de crecimiento y desarrollo que llevan los pediatras como control en los bebés. Por ejemplo, si un bebé está ubicado en el percentil 70 se dice que aproximadamente el 70% de los bebés obtuvo valoraciones menores que este valor.

Para determinar un percentil se sugiere el siguiente método.

Primero, se ordenan los datos en forma ascendente.

Luego, se calcula el coeficiente i que es:

$i = \left(\frac{k}{100}\right)n$ donde k es el número del percentil que se va a encontrar y n es el número de datos de la muestra.

Por último, se presentan dos opciones a partir del resultado de calcular i:

i un número entero o i un número decimal.

- Si i es un entero, se busca en el conjunto de datos los que están en las posiciones i e $i + 1$. El percentil buscado será el promedio de los dos datos encontrados.
- Si i es un número decimal, se aproxima este valor al entero inmediatamente superior; luego, se busca en el conjunto de datos aquel que ocupa esta posición; dicho valor es el percentil buscado.

EJEMPLO

El profesor de biología aplicó un examen de conocimientos a 50 de sus estudiantes. Los resultados se muestran a continuación:

60	66	92	55	84
90	78	74	69	92
55	79	68	63	86
67	90	62	74	79
45	88	88	80	67
96	69	83	91	97
87	55	89	90	64
76	44	65	77	78
88	83	91	78	82
91	81	70	50	90

Determinar el valor de p_{34}, p_{78} y p_{51}. Escribir una interpretación de dichos valores.

Primero, se ordenan los datos, en este caso un diagrama de tallo y hojas, es el más adecuado. El tallo serán las decenas de cada calificación, es decir 4, 5, 6, 7, 8 y 9, mientras que las hojas serán las respectivas unidades en cada dato.

El diagrama correspondiente se muestra a continuación:

4	4	5										
5	0	5	5	5								
6	0	2	3	4	5	6	7	7	8	9	9	
7	0	4	4	6	7	8	8	8	9	9		
8	0	1	2	3	3	4	6	7	8	8	8	9
9	0	0	0	0	1	1	1	2	2	6	7	

Segundo, se calcula el coeficiente i, para p_{34}:

$$i = \left(\frac{k}{100}\right) n = \left(\frac{34}{100}\right)50 = 17$$

Como el valor resultó ser un número entero, se busca en el diagrama de tallo y hojas los valores ubicados en las posiciones 17 y 18 para promediarlos:

70 69

4	4	5										
5	0	5	5	5								
6	0	2	3	4	5	6	7	7	8	9	9	
7	0	4	4	6	7	8	8	8	9	9		
8	0	1	2	3	3	4	6	7	8	8	8	9
9	0	0	0	0	1	1	1	2	2	6	7	

Posición 17: 69 Posición 18: 70

$$\text{Promedio} = \frac{69 + 70}{2} = 69{,}5$$

Por tanto, $p_{34} = 69{,}5$.

Ahora, se calcula el coeficiente i, para p_{78}:

$$i = \left(\frac{k}{100}\right) n = \left(\frac{78}{100}\right)50 = 39$$

Como el valor resultó ser un número entero, se busca en el diagrama de tallo y hojas los valores ubicados en las posiciones 39 y 40 para promediarlos:

Posición 39: 89 Posición 40: 90

$$\text{Promedio} = \frac{89 + 90}{2} = 89{,}5$$

Por tanto, $p_{78} = 89{,}5$.

Finalmente, se calcula el coeficiente i, para p_{51}:

$$i = \left(\frac{k}{100}\right) n = \left(\frac{51}{100}\right)50 = 25{,}5$$

Como el valor resultó ser un número decimal, se aproxima al siguiente entero es decir 26. Luego, se busca en el diagrama el dato que ocupa la posición 26 y este será el percentil buscado. Así, $p_{51} = 79$.

Para el caso de p_{51}, por ejemplo, se puede afirmar que a lo sumo el 51% de los estudiantes obtuvieron calificaciones inferiores a 79 puntos. En forma similar se interpretan p_{34} y p_{78}.

2.3 Deciles y cuartiles

Actividad

Deciles

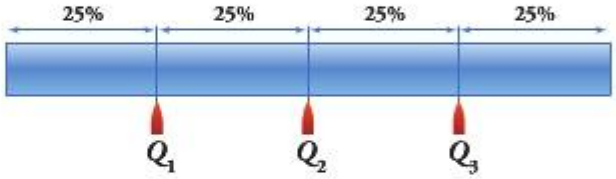
Los **deciles** son indicadores que dividen el grupo de datos en 10 partes porcentualmente iguales. Los deciles son: d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 … d_9.

Entre cada par de deciles se encuentra el 10% de los datos.

Cuartiles

Los **cuartiles** son medidas que dividen la muestra en cuatro partes porcentualmente iguales. Cada una de estas partes guarda el 25% de los datos. Se representan como: Q_1, Q_2, Q_3.

- El **primer cuartil** (Q_1) es tal que, a lo sumo, el 25% de los datos es menor en valor que Q_1 y cuando mucho el 75% de los datos en mayor que Q_1.
- El **segundo cuartil** (Q_2) es la mediana ($\tilde{x}$) y a lo sumo el 50% de los datos es menor que Q_2.
- El **tercer cuartil** (Q_3) es tal que, a lo sumo, el 75% de los datos es menor en valor que Q_3 y cuando mucho el 25% es mayor que Q_3.



Es importante aclarar algunas equivalencias entre percentiles, deciles y cuartiles:

$$Q_1 = p_{25} \qquad Q_2 = d_5 = p_{50} = \tilde{x} \qquad Q_3 = p_{75}$$

Así que, para calcular un cuartil o un decil, se usa el mismo procedimiento que para calcular un percentil; claro está que hay que determinar a qué percentil es equivalente el cuartil o decil buscado.

Por ejemplo, para hallar d_2 y Q_1 en el resultado obtenido por los estudiantes sobre conocimientos en biología, se tiene:

Como $d_2 = p_{20}$, se halla p_{20}, aplicando el proceso anterior.

$$i = \left(\frac{k}{100}\right) n = \left(\frac{20}{100}\right) 50 = 10$$

Como el valor resultó ser un número entero, se busca en el diagrama de tallo y hojas los valores ubicados en las posiciones 10 y 11 para promediarlos:

Posición 10: 64 Posición 11: 65

Promedio $= \frac{64 + 65}{2} = 64{,}5$ Por tanto, $d_2 = p_{20} = 64{,}5$

Como $Q_1 = p_{25}$, se halla p_{25}, aplicando el proceso anterior.

$$i = \left(\frac{k}{100}\right) n = \left(\frac{25}{100}\right) 50 = 12{,}5$$

Como el valor resultó ser un número decimal, se aproxima a 13 y se busca en el diagrama de tallo y el valor ubicado en esta posición: Posición 13: 67

Por tanto, $Q_1 = p_{25} = 67$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Razono · Propongo

Las notas finales en los exámenes de matemáticas de 30 estudiantes de primer semestre de ingeniería de alimentos son:

75	85	82	92	80	90
67	89	90	77	88	70
89	91	96	79	79	80
97	76	40	85	90	67
45	60	79	82	99	60



1. Determina el promedio del grupo.
2. Si el examen se aprobaba con una nota mayor o igual a 70, ¿qué porcentaje de estudiantes aprobó el examen?
3. Determina los cuartiles del grupo.
4. Calcula el percentil 70. ¿Este valor tiene alguna relación con el puntaje 70 con el que se aprobaba el examen? Explica tu respuesta.
5. Calcula el decil 9 y escribe una interpretación de este resultado.

Una compañía de aviación que ofrece un vuelo diario a una determinada región del país no cumplió con el horario de llegada en los últimos 10 días del mes de febrero. A continuación se registran los minutos de retardo (valores negativos) o anticipación (valores positivos) con que llegaron dichos vuelos:

−30 60 40 10 −40 124 20 −10 40 10

6. Si la compañía contrata un especialista en estadística para mostrar el cumplimiento, ¿qué medidas debería utilizar esta persona en el análisis de los datos? ¿Cuál de estas medidas sería la más representativa?
7. Si el objetivo fuese mostrar un buen servicio (cumplimiento), ¿qué medida utilizaría? Explica tu respuesta.
8. Si el objetivo fuese mostrar un mal servicio, ¿qué medida utilizaría? Explica tu respuesta.

El departamento de bienestar social de una universidad elaboró una encuesta en la que preguntó por el peso y la talla de los estudiantes que tomaron como electiva "gimnasio". Los resultados se muestran a continuación:

Peso (kg)		Talla (m)	
54	56	1,57	1,55
67	65	1,67	1,72
87	56	1,71	1,67
55	58	1,6	1,63
47	61	1,51	1,55
48	66	1,6	1,62
59	49	1,69	1,49
65	48	1,63	1,5
78	49	1,7	1,47
49	51	1,56	1,61



9. Escribe el valor de la media, la mediana y la moda para la variable peso.
10. Escribe el valor de la media, la mediana y la moda para la variable talla.
11. Halla el valor de los cuartiles en la variable peso y escribe una interpretación de cada uno de ellos.
12. Halla el valor de los cuartiles en la variable talla y escribe una interpretación de cada uno de ellos.
13. ¿Cuántos universitarios de la electiva mencionada están por encima del promedio de peso?
14. ¿Cuántos universitarios de la electiva mencionada están por debajo del promedio de talla?
15. Escribe una conclusión a partir de los resultados de los dos numerales anteriores.
16. ¿Qué talla tiene el 70% o menos de los estudiantes?

R **En una empresa de mensajería se asigna un presupuesto diario para la gasolina que gastan en sus motos los 30 mensajeros que trabajan allí. El gerente de operaciones le plantea al tesorero que el dinero presupuestado no alcanza pues el 85% de los mensajeros gastaron más de lo asignado.**

El gasto en combustible de la semana anterior se registra a continuación.

Mensajero	Gasto	Mensajero	Gasto
1	24.000	16	24.000
2	23.000	17	21.000
3	21.000	18	28.000
4	23.000	19	26.000
5	24.500	20	21.000
6	21.800	21	27.000
7	24.500	22	23.400
8	22.300	23	21.700
9	21.000	24	25.600
10	18.000	25	27.900
11	23.500	26	21.700
12	24.600	27	23.200
13	23.700	28	24.300
14	21.900	29	21.700
15	22.600	30	22.500

17. ¿Cuánto fue el promedio que gastaron los mensajeros en gasolina la semana pasada?

18. ¿Esta medida sería una buena razón para justificar el planteamiento del gerente de operaciones?

19. Calcula los cuartiles para los datos de los 30 mensajeros.

20. ¿Cuál fue el presupuesto asignado por mensajero? ¿Qué medida de posición usarías para calcular este valor?

21. ¿Qué significado tiene el valor del percentil 85 en este caso?

22. ¿Cuánto crees que se debería asignar de presupuesto para las semanas posteriores? Justifica tu respuesta.

Los atunes son peces que poseen características morfológicas que les permiten ser buenos nadadores: tienen cuerpo fusiforme, cabeza pronunciada en forma de pirámide triangular y boca relativamente pequeña con respecto al desarrollo del cráneo. Las escamas que cubren su dura y muy resistente piel son pequeñas, poco evidentes y lisas; su piel está lubricada con un "mucus" que reduce la fricción con el agua. La forma del cuerpo les permite nadar grandes distancias y alcanzar altas velocidades de hasta 70 kilómetros por hora. En la actualidad, la pesca de atún es muy común ya que este pez se ha constituido en materia prima para brindar a la sociedad un producto nutritivo y de bajo costo.

A continuación, se presentan los datos relacionados con la longitud de un cardumen de atún que fue pescado en el océano:

57	67	89	89	54	86
67	68	76	87	55	75
78	98	98	75	76	98
79	76	97	68	67	76
87	87	87	98	86	9
99	88	89	96	85	82
79	74	69	91	45	87
78	92	65	95	88	88
87	86	79	74	88	69
69	85	89	65	97	89



23. Determina la longitud promedio del cardumen.

24. Encuentra el percentil 67 y escribe una interpretación con relación a este valor.

25. ¿La media, la mediana y la moda en esta situación son medidas cercanas? Explica tu respuesta.

2.4 Diagrama de cajas y bigotes

Recurso imprimible · Ampliación multimedia

Es una representación gráfica de los datos de una muestra o población y se convierte en una estrategia muy útil para identificar qué tan agrupados están los datos en relación con las medidas de tendencia central; además provee una visión gráfica en la cual se pueden identificar las observaciones atípicas.

Para elaborar el diagrama de cajas y bigotes se utilizan los cuartiles y el rango intercuartílico (RIC):

$$\text{RIC} = Q_3 - Q_1$$

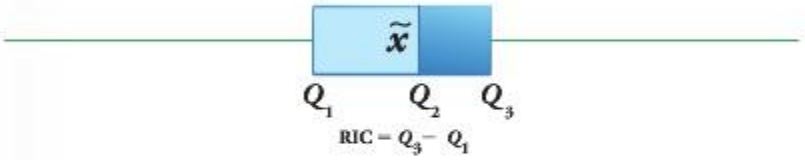
Es necesario elegir una escala adecuada dependiendo de los datos.

Luego, hacer los cálculos que se presentan a continuación de la manera más precisa posible.

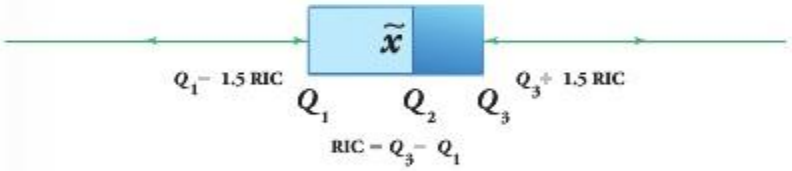
Primero, se dibuja una recta numérica, con una escala adecuada.

Segundo, se ubica en ella un rectángulo (Caja) cuya base está determinada por el rango intercuartílico, esta caja se ubica desde Q_1 hasta Q_3.

Como es lógico, la mediana $\tilde{x}(Q_2)$ queda ubicada dentro de la caja.



Tercero, se construyen los bigotes, teniendo en cuenta la siguiente expresión que es constante para cualquier diagrama.



Extremo inferior: $Q_1 - 1{,}5\ \text{RIC}$

Extremo superior: $Q_3 + 1{,}5\ \text{RIC}$

Por último, se ubican los datos teniendo en cuenta la escala planteada en el diagrama.

Se debe tener en cuenta que los datos que se encuentran por fuera de los extremos de los bigotes pueden considerarse atípicos.

Cuando aparecen datos atípicos es importante analizar su origen. Es decir, si corresponden a errores de escritura de quien formó la base de datos, con lo cual resulta necesario retirarlos de los datos.

Si estos datos son simplemente individuos con características diferentes a las de la mayoría de la población, entonces se deben tener en cuenta en todas las apreciaciones y conclusiones que se desprendan del estudio de la base de datos.

Por tanto, el diagrama muestra qué tan dispersos están los datos entre otros y a la vez qué tan simétrica es su distribución.

Historia de las matemáticas

Cajas y bigotes

El diagrama de cajas y bigotes es un tipo de gráfica de uso relativamente reciente, fue creado por John W. Tukey en 1977.

Recuerda que...

Una gráfica es una representación visual de las relaciones entre un conjunto de datos, por lo cual presenta una forma de organización visual de la información. Esta es una de las razones por las cuales las gráficas se usan con mucha frecuencia en periódicos y revistas. También es importante resaltar que hay ocasiones en que la información es muy compleja para entenderla y una ilustración gráfica ayuda a tal fin.

EJEMPLO

El Instituto Colombiano de Bienestar Familiar (ICBF) ha iniciado un programa de control de desórdenes alimenticios en niños de edades entre los 10 y los 13 años, pues en esta población se ha determinado el incremento de casos de anorexia. Para tal fin, registró los datos de 40 niños que fueron reportados por sus maestros al observar bajas de peso exageradas. A continuación se registran el número de kilos que bajó cada uno:

3	3	2	6	0	1	4	3	1	5
4	8	1	2	4	2	2	3	2	2
1	3	2	15	2	2	1	1	2	2
1	2	2	3	3	4	3	1	1	2

Elaborar el diagrama de cajas y bigotes.

Primero, se ordena el conjunto de datos en forma ascendente:

0	1	1	2	2	2	3	3	4	5
1	1	1	2	2	2	3	3	4	6
1	1	2	2	2	2	3	3	4	8
1	1	2	2	2	2	3	3	4	15

Segundo, se calcula el valor de los cuartiles (Q_1, Q_2, Q_3)

- Q_1:

$i = \left(\frac{p}{100}\right)40 = \left(\frac{25}{100}\right)40 = 10$

Luego, Q_1 es el promedio entre los datos 10 y 11. $Q_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$

- Q_2: (Mediana $\tilde{x}$):

$i = \left(\frac{p}{100}\right)40 = \left(\frac{50}{100}\right)40 = 20$

Luego, Q_2 es el promedio entre los datos 20 y 21. $Q_2 = \frac{2+2}{2} = 2$

- Q_3:

$i = \left(\frac{p}{100}\right)40 = \left(\frac{75}{100}\right)40 = 30$

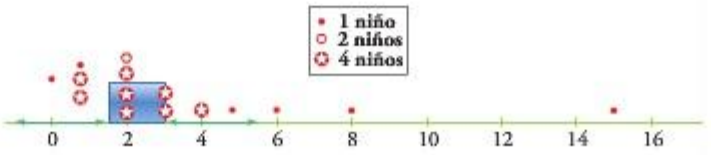
Luego, Q_3 es el promedio entre los datos 30 y 31. $Q_3 = \frac{3+3}{2} = 3$

Por último, se calcula el RIC y los extremos de los bigotes: RIC = 3 − 1,5 = 1,5

Extremo inferior: $Q_1 - 1{,}5$ RIC = 1,5 − (1,5)(1,5) = −0,75

Extremo superior: $Q_3 + 1{,}5$ RIC = 3 + (1,5)(1,5) = 5,25

El diagrama es:



Se puede observar que hay tres datos atípicos.

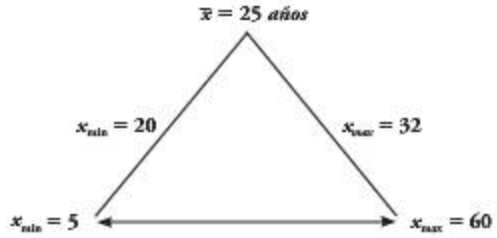
3. Medidas de dispersión

Ampliación multimedia

Cuando se calcula el promedio de un conjunto de datos, en algunos casos se desconoce qué tanto representa este valor a dicho conjunto; incluso hay ocasiones en las cuales el promedio propone una interpretación no adecuada y que está bastante alejada de la realidad de la muestra o población que se está utilizando.

Las **medidas de dispersión,** también denominadas **medidas de variabilidad,** permiten saber si hay concentración de los datos alrededor de la media, esto indicaría que hay una **alta representatividad** de este valor. Si por el contrario hay una gran dispersión, esto indicaría **poca representatividad** por lo cual esta medida no sería confiable.

Para ejemplificar este concepto, se plantean dos conjuntos de datos distintos de edades en los cuales hay una misma media. Observa el siguiente diagrama:



Las medidas de variabilidad que se estudian son: el rango, la varianza y la desviación estándar.

3.1 Rango

El **rango** es la medida determinada por la diferencia entre el dato mayor y el dato menor de la muestra. Brinda un intervalo en el cual se pueden "encajonar" los datos. Si el rango es un número grande, indica que los datos presentan mucha dispersión; mientras que, si el rango es un valor pequeño, la dispersión de la muestra es pequeña.

EJEMPLO

Las calificaciones de dos estudiantes al final del año escolar se registran a continuación:

Estudiante 1	89	97	88	95	62	99
Estudiante 2	88	88	87	87	89	91

El comité de becas de la institución educativa ha decidido adjudicarle una beca al estudiante con mejor promedio. ¿Cuál será el estudiante beneficiado?

Al calcular el promedio de las calificaciones de los dos estudiantes se tiene que:

$\overline{x_1} = 88{,}33$ $\overline{x_2} = 88{,}33$

El promedio de los dos estudiantes es el mismo, sin embargo, el comité de becas decidió asignarle el premio al segundo estudiante pues consideraron que presentaba mayor regularidad en sus resultados, como se observa en el rango de cada uno de ellos:

$\text{Rango}_1 = 99 - 62 = 37$ $\text{Rango}_2 = 91 - 87 = 4$

3.2 Varianza

Actividad

> **Recuerda que...**
> Es recomendable interpretar la varianza como una media útil para comparar el grado de dispersión de dos o más variables, pues al compararlas, la que tiene mayor varianza tiene mayor dispersión o mayor variabilidad.

La **varianza** es una medida de variabilidad que presenta la diferencia entre cada dato y la media. Se representa como s^2, si es tomada en una muestra y σ^2, si es tomada en una población.

Esta diferencia recibe el nombre de desviación con respecto al promedio; para un conjunto de datos $x_1, x_2 \ldots x_i$ se define dicha desviación como:

$x_i - \bar{x}$ cuando la media es tomada de una muestra (media muestral)

$x_i - \mu$ cuando la media es tomada en una población (media poblacional)

Para calcular la varianza se elevan al cuadrado las desviaciones de todos los datos y luego, se suman. Teniendo en cuenta esto, la varianza se define como:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \text{ en una muestra}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} \text{ en una población}$$

Es importante apreciar que las unidades asociadas a la varianza a veces causan confusiones en su interpretación, ya que los valores que se suman al calcularla determinan que las unidades quedan, a su vez, elevadas al cuadrado y esto presenta una dificultad al hacer el análisis.

Al calcular la varianza de una muestra o población se debe tener en cuenta que la suma de todas las desviaciones debe ser igual a 0.

3.3 Desviación estándar

También se conoce como **desviación típica** y se genera a partir de la varianza, pues como ella siempre se expresa en unidades diferentes a las unidades originales, la desviación se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Si es tomada en una muestra se representa con s y si es tomada en una población se representa como σ, así:

Desviación estándar muestral: $\sqrt{s^2} = s$

Desviación estándar poblacional: $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$

EJEMPLO

En un laboratorio farmacéutico trabajan en la creación de un nuevo medicamento que ayuda a fortalecer el sistema inmunológico del cuerpo en los humanos. Para ello, se han basado en un tratamiento informal que aplica cierta costumbre indígena según la cual se usan unos insectos propios de su región para tal fin. Los investigadores decidieron cultivar colonias de dicho insecto para analizarlo en beneficio de su objetivo final.

A continuación se presentan las cantidades de insectos en cada una de las colonias después de un mes de iniciar con el estudio:

Colonias de insectos			
2.850	2.755	2.940	2.880
2.950	2.710	3.325	3.130
3.050	2.890	2.920	2.880

Determinar las medidas de variabilidad estudiadas y escribir algunas conclusiones.

El dato menor de la muestra es $D_m = 2.710$ y el dato mayor es $D_M = 3.325$; así que el rango está dado por: $D_M - D_m = 3.325 - 2.710 = 615$ insectos

En este caso, el problema indica que los investigadores estudiaron todas las colonias de insectos, por lo cual las medidas se calculan teniendo en cuenta que son una población.

La media poblacional está dada por:

$$\mu = \frac{2.850 + 2.950 + 3.050 + 2.755 + 2.710 + 2.890 + 2.940 + 3.325 + 2.920 + 2.880 + 3.130 + 2.880}{12} = 2.940 \text{ insectos}$$

Ahora, para calcular la varianza y la desviación estándar es útil elaborar la siguiente tabla:

Insectos en cada colonia	Media de la población	Desviación con respecto a la media $x_i - \mu$	Desviación respecto a la media al cuadrado $(x_i - \mu)^2$
2.850	2.940	−90	8.100
2.950	2.940	10	100
3.050	2.940	110	12.100
2.880	2.940	−60	3.600
2.755	2.940	−185	34.225
2.710	2.940	−230	52.900
2.890	2.940	−50	2.500
3.130	2.940	190	36.100
2.940	2.940	0	0
3.325	2.940	385	148.225
2.920	2.940	−20	400
2.880	2.940	−60	3.600
		$\sum(x_i - \mu) = 0$	$\sum(x_i - \mu)^2 = 301.850$

La varianza de la población está dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{12} = \frac{301.850}{12} = 25.154{,}16 \text{ insectos}^2$$

La desviación estándar de la población está dada por

$\sigma = 158{,}60$ insectos

Teniendo en cuenta los datos y las medidas de variabilidad se puede afirmar que la media es un buen descriptor de la población y que, por tanto, no hay datos atípicos. Esta conclusión indica que, hasta el momento, las colonias se están multiplicando de manera normal y en condiciones adecuadas.

Matemáticamente

¿Qué significan los valores negativos en la columna de $(x_i - \mu)$?

¿Qué significan los valores positivos en la columna $(x_i - \mu)$?

¿Qué significa el valor 0 en la columna $(x_i - \mu)$?

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Razono · Propongo

La mayoría de los países fijan edades mínimas y máximas para juzgar a personas como menores o adultos. Igual que a los adultos, los menores pueden ser acusados de delitos mayores y delitos menores. Sin embargo, solo los menores pueden ser acusados de los delitos por una condición de ser menor de edad.

Cuando se acusa a un menor de un delito violento, como agresión agravada u homicidio, en general, los tribunales realizan una audiencia de renuncia a la jurisdicción o de transferencia para determinar si el menor debe ser juzgado como adulto.

La cifras de delitos mayores cometidas por menores se incrementan día a día, lo cual pone una alerta social en relación con este hecho.

A continuación, se presentan las edades de 56 delincuentes que cometieron algún delito que puede considerarse como delito mayor:

11	15	15	16	21	17	19	17
17	17	17	17	20	20	18	16
13	18	17	16	16	14	21	17
24	23	12	17	17	15	20	16
23	22	22	17	16	17	22	17
14	18	21	18	15	14	16	17
15	14	17	19	16	17	17	18



26. Determina la edad promedio de los delincuentes.

27. Encuentra los cuartiles para la muestra.

28. Encuentra los percentiles 10 y 85 y escribir una interpretación de ellos.

29. Determina si hay una edad de moda en los delincuentes.

En una clínica se registraron los siguientes datos sobre la talla en centímetros de 60 bebés que nacieron durante una semana.

45	51	49	51	47	53
48	53	49	53	48	53
49	52	48	55	51	55
51	57	53	53	54	61
53	55	52	49	56	48
52	48	55	47	56	46
57	49	59	51	59	47
60	57	41	53	48	47
41	55	49	49	48	53
48	43	48	48	58	53



30. ¿Qué talla promedio tienen los bebés?

31. ¿Este promedio qué indica de la muestra?

32. Calcula la mediana y escribe una interpretación de ella.

33. Calcula el percentil 95 y escribe lo que crees que significa en este conjunto de datos.

34. Elabora el diagrama de cajas y bigotes y determina si existen datos atípicos.

35. Calcula el rango para el conjunto de datos y escribe una interpretación de él.

R **Un equipo de investigadores de la Secretaría de Movilidad de la ciudad publicó los resultados de un experimento hecho en el marco de una campaña de concientización de los conductores sobre el abuso de la velocidad en la temporada invernal.**

El experimento consistió en poner a circular 30 vehículos de modelos nuevos, con frenos ABS a una velocidad de 48 kilómetros por hora, sobre una pista mojada. Los resultados de las respectivas distancias de frenado de dichos vehículos se registran en el siguiente diagrama de tallo y hojas:

Distancia de frenado en metros

1	9	7	8	6	7		
2	0	4	0	1	8	4	7
3	2	6	0	1	0	0	1
4	0	0	3	2	2		
5	0	1	3	0	1	1	



36. Encuentra la media, la mediana y la moda de las distancias de frenado.

37. Halla las medidas de variabilidad y determina cuál de ellas te da una mejor interpretación para esta base de datos.

38. Encuentra los percentiles 30, 60 y 90. Determina una conclusión a partir de ellos.

39. Halla los cuartiles y elabora el diagrama de cajas y bigotes para las distancias de frenado.

40. ¿Hay datos atípicos en la situación planteada? Justifica tu respuesta.

41. Consulta en la página de la Secretaría de Movilidad los límites de velocidad permitidos en la ciudad y en carretera. Luego, escribe una conclusión que relacione esta información y los diferentes estadísticos que hallaste en la base de datos proporcionada por el problema.

Un centro comercial de la ciudad ha decidido emprender una campaña para incrementar el número de sus visitantes y clientes. Para iniciar dicha campaña, decidieron hacer una encuesta en la cual preguntaron la edad de las personas que frecuentan dicho lugar un fin de semana en las horas comprendidas entre las 6 p. m. y las 8 p. m.

A continuación, se presentan los datos recogidos:

20	35	19	40	31	67	21	20
15	35	18	32	33	15	33	23
12	31	19	23	18	19	37	24
11	26	21	26	26	32	37	28
25	28	23	28	27	26	23	21
28	26	34	19	30	27	25	22
29	29	26	21	19	26	19	10



42. Elabora un diagrama de tallo y hojas de las edades de los visitantes.

43. ¿Entre qué rangos de edad está la mayoría de los visitantes?

44. A simple vista, ¿podrías determinar la edad promedio de los visitantes?

45. Calcula las medidas de tendencia central de la muestra y escribe algunas conclusiones con relación a ellas.

46. Determina el valor de los deciles 3 y 6, luego, escribe una interpretación de ellos.

47. Determina los cuartiles para la situación.

48. ¿La media de la muestra es un buen descriptor de ella? Justifica tu respuesta.

49. Escribe algunas conclusiones que se puedan extraer de los estadísticos que hallaste en la muestra.

4. Caracterización de variables cuantitativas continúas para datos agrupados

Recurso imprimible Ampliación multimedia

Es común encontrar que los diferentes datos de un estudio se presentan en forma agrupada, es decir, en una tabla de distribución de frecuencias. En tal caso, la caracterización de la variable se hace teniendo en cuenta las clases y la ubicación de los respectivos datos en dichas clases.

En cursos anteriores se planteó que la caracterización de una variable cuantitativa discreta se hacía teniendo en cuenta los siguientes estadísticos:

- Tabla de distribución de frecuencias
- Diagrama de tallo y hojas
- Histograma
- Polígono de frecuencias
- Ojiva

Cuando la variable se comporta de manera continua, por ejemplo la talla, el peso, la distancia entre otras, la caracterización se hace siguiendo los mismos parámetros y teniendo en cuenta que el tamaño de cada intervalo debe ser adecuado para la base de datos correspondiente.

Una característica en la tabla de distribución de frecuencias, y en el histograma, radica en que el límite inferior de cada intervalo es cerrado, mientras que el límite superior es abierto.

EJEMPLO

En un centro médico especializado en pacientes con diabetes, se practica la prueba de hemoglobina A1C. La hemoglobina A1C es una combinación de hemoglobina (parte de los glóbulos rojos que transporta el oxígeno) y glucosa (tipo de azúcar en la sangre). Esta prueba es una forma muy adecuada de verificar y comprobar el azúcar en la sangre por períodos de hasta tres meses.

Los resultados que se muestran a continuación son de 40 pacientes diabéticos a los que se les practicó dicho examen durante un mes:

6,5	5	5,6	7,6	4,8	8	7,5	7,9	8	9,2
6,4	6	5,6	6	5,7	9,2	8,1	8	6,5	6,6
5	8	6,5	6,1	6,4	6,6	7,2	5,9	5	5,7
7,9	6	5,6	6	6,2	7,7	6,7	7,7	8,2	9

Caracterizar la variable "resultados de la prueba de hemoglobina A1C" usando las siguientes clases:

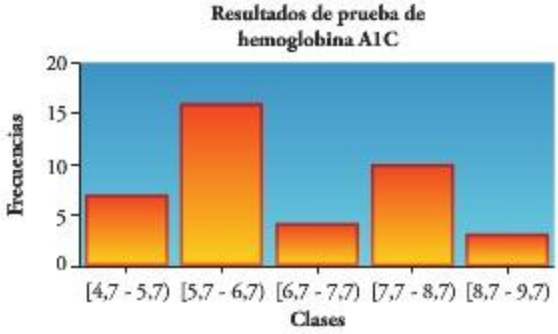
$$[4{,}7 - 5{,}7);\ [5{,}7 - 6{,}7);\ [6{,}7 - 7{,}7);\ [7{,}7 - 8{,}7);\ [8{,}7 - 9{,}7)$$

Como las clases ya están definidas, se elabora la tabla de distribución de frecuencias, como la que se muestra en la siguiente página.

Clases	f	fr	F	Fr	%	x_i
[4,7 - 5,7)	7	$\frac{7}{40}$	7	$\frac{7}{40}$	17,5%	5,2
[5,7 - 6,7)	16	$\frac{2}{5}$	23	$\frac{23}{40}$	40%	6,2
[6,7 - 7,7)	4	$\frac{1}{10}$	27	$\frac{27}{40}$	10%	7,2
[7,7 - 8,7)	10	$\frac{1}{4}$	37	$\frac{37}{40}$	25%	8,2
[8,7 - 9,7)	3	$\frac{3}{40}$	40	1	7,5%	9,2
Total	40	1	—	—	100%	—

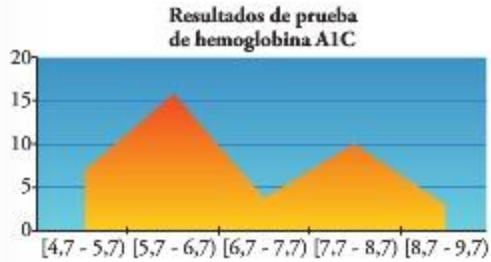
Es necesario tener en cuenta que, en el intervalo [4,7 - 5,7) no se incluye el valor 5,7; y en forma similar para los demás intervalos. Esto es muy importante, ya que afecta el conteo y por tanto, la frecuencia de cada clase.

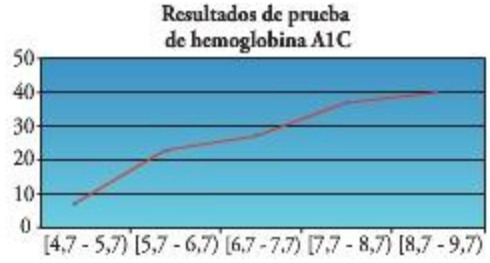
El histograma correspondiente a la distribución se construye tomando como base la columna de frecuencias, así como se hace para las variables discretas.



En el histograma se observa claramente, que la mayoría de los pacientes presentan un nivel entre 5,7 (incluyéndolo) y 6,7 en la prueba; además muy pocos pacientes, solo 3, presentan un nivel por encima de 8,7 en la prueba; cabe anotar que este nivel es alto y de mucho riesgo en dichos pacientes.

A su vez, y teniendo en cuenta las marcas de clase x_i es posible generar el polígono de frecuencias, de igual manera y usando las frecuencias acumuladas de la distribución, generamos la ojiva correspondiente:





4.1 Media ponderada

Actividad

En la sección 2 se definió la media en una muestra como:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

En esta fórmula es importante aclarar que todos los valores de x_i se consideran con la misma importancia y, aunque esto es lo más común al calcular medidas de tendencia central, existen casos en los cuales todas las observaciones no tienen el mismo peso o valor dentro del conjunto de datos.

Por ejemplo, el dueño de un restaurante hace diferentes pedidos de carne mensualmente. A continuación, se presentan los pedidos durante el mes de marzo:

Fecha	Cantidad de libras	Precio por libra ($)
Marzo 3	35	7.500
Marzo 10	24	8.700
Marzo 14	32	7.300
Marzo 23	20	8.850
Marzo 27	12	8.950

En la tabla se aprecia que el precio de la libra de carne varía según la fecha y la cantidad que se compre.

Por tal razón, para poder determinar el promedio del precio de la carne es necesario plantear otra estrategia, ya que la fórmula inicial para la media no se verifica en este tipo de situaciones.

Cuando se quiere calcular la media de un conjunto de datos en el cual cada uno tiene un "peso" diferente que refleja su importancia, es decir, una ponderación, se utiliza la siguiente expresión que recibe el nombre de **media ponderada**:

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

en donde x_i es el valor de cada dato i y w_i es el peso o factor de ponderación del dato i.

- Si los datos provienen de una muestra la media que se obtiene es la media ponderada muestral ($\bar{x}$).
- Si los datos hacen referencia a una población se obtiene la media ponderada poblacional (μ).

En el ejemplo del dueño del restaurante, se tiene que el precio de la carne cambió de $7.300 a $8.950 ya que a su vez las libras que compró cambiaron de 12 a 35; por tanto, se puede observar que el precio no se mantuvo constante. Así, para calcular el promedio se debe utilizar la fórmula de la media ponderada.

En este caso:

w_i: corresponden a la columna de la cantidad de libras.

x_i: corresponden a la columna de los precios por libra.

Luego, la media ponderada es:

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{w_i}$$

$$= \frac{7.500 \times 35 + 8.700 \times 24 + 7.300 \times 32 + 8.850 \times 20 + 8.950 \times 12}{35 + 24 + 32 + 20 + 12}$$

$$= \frac{989.300}{123}$$

$$= 8.043{,}089$$

Así, se puede concluir que, en promedio, cada libra de carne valió $8.043,089.

Matemáticamente

Calcula la media tomando los precios dados en la columna de los x_i y dividiendo este valor entre las cinco compras.

¿Qué puedes concluir con respecto a este valor y al valor de la media ponderada?

4.2 Media y desviación estándar en datos agrupados

En la mayoría de los casos, las medidas de tendencia central y de dispersión se calculan teniendo en cuenta un grupo de datos o valores individuales. Sin embargo, cuando los datos que proporciona un estudio están presentados en forma agrupada (en una distribución de frecuencias) es posible examinar una aproximación de estas medidas usando, entre otros conceptos, la media ponderada.

Para calcular la media en una distribución de frecuencias se usa la columna de la frecuencia (f) y la columna de la marca de clase de cada intervalo (x_i).

Así, la media ponderada, se calcula tomando como valor representativo de la clase a x_i y como factor de ponderación a la frecuencia en el respectivo intervalo f_i; el denominador en la expresión será la suma de las frecuencias, es decir, el número de elementos de la muestra o población estudiada.

Teniendo en cuenta lo anterior, la media ponderada en una distribución de frecuencias en una muestra está determinada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$$

En forma similar, es posible calcular la varianza usando una variación de la fórmula que presentamos en el tema anterior de esta unidad. En ella, las desviaciones de los valores de los datos con respecto a la media se planteaban como $x_i - \bar{x}$, pero como en el caso de las distribuciones de frecuencias no se conocen específicamente esos datos x_i, entonces se usa a x_i como el dato representante y con él se calcula dicha desviación.

Así, la varianza de la muestra está determinada por la siguiente expresión:

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

En forma similar la desviación estándar es:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Si el estudio se hace en una población, las fórmulas anteriores se convierten en:

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{n} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{n} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{n}}$$

Recuerda que...

Para hallar la media ponderada se utiliza la fórmula:

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{n}$$

EJEMPLO

Después de aplicar un examen de aptitud a los estudiantes de un colegio, la entidad correspondiente entregó los siguientes resultados sobre el desempeño en la prueba.

Clases	f	fr	%	x_i
[2,5 - 4)	23	$\frac{23}{90}$	25,6	3,25
[4 - 5,5)	21	$\frac{21}{90}$	23,3	4,75
[5,5 - 7)	20	$\frac{20}{90}$	22,2	6,25
[7 - 8,5)	15	$\frac{15}{90}$	16,7	7,75
[8,5 - 10)	11	$\frac{11}{90}$	12,2	9,25

Junto con los resultados se informó al colegio que el examen se aprobaba con un mínimo de 7 puntos y que, además, si el promedio del grupo era menor a 6 puntos dicha empresa repetiría la prueba.

Hallar el promedio de las calificaciones obtenidas y determinar si este valor es representante del grupo de estudiantes.

Como no es posible obtener los datos en forma individual, entonces, se usa la fórmula de la media ponderada para calcular el promedio. Luego, se tiene que:

$$\mu = \frac{3{,}25 \times 23 + 4{,}75 \times 21 + 6{,}25 \times 20 + 7{,}75 \times 15 + 9{,}25 \times 11}{23 + 21 + 20 + 15 + 11} = 5{,}75$$

Ahora, para analizar si este valor es un buen representante de la población, se calcula la desviación estándar, así:

Marca de clase	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$
3,25	$-2{,}5$	6,25
4,75	-1	1
6,25	0,5	0,25
7,75	2	4
9,25	3,5	12,25
		$\sum f_i(x_i - \mu)^2 = 364{,}5$

Así, la varianza es $\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \mu)^2}{90} = 4{,}05$ y la desviación estándar es $\sigma = 2{,}01$.

Se observa que la desviación es pequeña. Por tanto, la media es un buen descriptor de la población y, en conclusión, se puede afirmar que los estudiantes no aprobaron el examen pues la calificación promedio fue 5,75 puntos y deben repetir la prueba.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Razono · Argumento · Propongo

En cada caso, calcula la media ponderada. Luego, calcula la media sumando los valores de la columna x_i y dividiendo entre el número de clases. Compara los resultados obtenidos en cada numeral.

50.

x_i	w_i
6	2,5
13	4,5
8	1,5
2	5

51.

x_i	w_i
3,2	6
1,5	5
2,9	1
4,7	4

El promedio de calificaciones para los estudiantes de un colegio se basa en el cálculo de la media ponderada.



La primera calificación vale el 10%, la segunda el 20%, la tercera el 30% y la cuarta el 40% de la nota. A continuación, se presentan las calificaciones de varios estudiantes.

	10%	20%	30%	40%
Pablo	34	78	60	100
Juanita	67	76	65	68
Andrea	54	69	65	82
Oscar	100	59	61	79
David	51	100	93	60
Federico	91	78	65	88
Diana	93	78	95	32

52. ¿Cuál fue promedio de cada estudiante?

53. Si el examen se aprobaba con 70 puntos, ¿quiénes aprobaron?

54. Calcula el promedio ignorando el factor de ponderación.

55. ¿El número de personas que aprobarían el examen cambia? ¿Disminuye o aumenta?

El departamento comercial de una empresa editorial asigna un presupuesto para gastos de viaje de sus vendedores. Se ha observado que algunos gastan mucho dinero, mientras que otros gastan poco. A continuación, se presenta la información para el gasto diario:

Gasto en $	Cantidad de vendedores
[35.000 - 48.000)	6
[48.000 - 61.000)	3
[61.000 - 74.000)	7
[74.000 - 87.000)	5
[87.000 - 100.000)	8

56. Determina la media ponderada del gasto diario.

57. Encuentra la desviación estándar de la situación.

58. Elabora el histograma que describe la situación.

59. Construye la columna de frecuencias acumuladas y, a partir de ellas, elabora la respectiva ojiva.

60. Escribe una conclusión usando como referencia los estadísticos anteriores.

En una encuesta aplicada a 2.000 mujeres que trabajan en actividades de servicio doméstico, se encontró que sus edades van entre 18 años y 50 años. A continuación, se presenta la información:

Edades	No. de mujeres
[18, 22)	16%
[22, 26)	7%
[26, 30)	8%
[30, 34)	21%
[34, 38)	15%
[38, 42)	17%
[42, 46)	10%
[46, 50)	6%

61. Determina qué cantidad de mujeres trabajan en el servicio doméstico teniendo en cuenta los rangos de edad propuestos en la tabla.

62. Halla la edad promedio de este grupo de mujeres.

63. Determina, usando la varianza y la desviación estándar, si la media de edad es un buen representante de la población de mujeres.

R **Las edades de varios trabajadores que reportan nivel 2, en su clasificación del SISBEN, se registran a continuación:**

48	33	47	49	33	44	51	40	45	50	40	44
32	47	55	33	44	42	48	37	46	35	33	41
47	38	35	40	39	38	35	39	43	32	40	42

64. Encuentra la media y la desviación estándar del conjunto de datos.

65. Elabora la tabla de distribución de frecuencias correspondiente.

66. Calcula la media ponderada y compárala con la media hallada en el numeral 64.

67. Calcula la desviación estándar tomando como referencia la media ponderada y las marcas de clase.

68. ¿Cuáles de las medidas halladas crees que son más exactas? Explica tu respuesta.

69. Representa la base de datos usando el histograma correspondiente.

Una estación de servicio ubicada en el centro de la ciudad reportó la siguiente distribución de frecuencias en la cual relaciona el número de galones de gasolina vendidos a 680 clientes en las horas de la tarde de un día lunes.

Galones	Clientes
[0, 4)	108
[4, 8)	156
[8, 12)	198
[12, 16)	87
[16, 20)	78
[20, 24)	53



70. Determina el promedio de galones de gasolina vendido en la estación en el horario indicado.

71. Halla la varianza y la desviación estándar de la situación planteada.

72. Completa la tabla de distribución. Luego, escribe algunas conclusiones relacionadas con los porcentajes de ventas.

73. Si en promedio el galón de gasolina se vende a $9.540, ¿cuánto dinero recaudó la estación en el horario indicado?

R **Una empresa que presta el servicio de mantenimiento de aparatos telefónicos reporta que sus empleados dedican diferentes lapsos de tiempo de su actividad laboral a practicar los ejercicios propuestos por el comité de salud ocupacional. A continuación se registran los tiempos en minutos:**

Tiempos	No. de empleados
[0 - 3,5)	36
[3,5 - 7)	15
[7 - 10,5)	26
[10,5 - 14)	18
[14 - 17,5)	5
[17,5 - 21)	2



74. Determina el promedio de tiempo que emplean los trabajadores en hacer los ejercicios.

75. Halla la varianza y la desviación estándar de la situación planteada.

76. Completa la tabla de distribución de ella y elabora el histograma y la ojiva correspondientes.

77. Si el promedio de tiempo adecuado para realizar los ejercicios es de 15 minutos, ¿qué podrías concluir respeto de este grupo de empleados?

5. Conjuntos y eventos

Ampliación multimedia Enlace web

Un **conjunto** es una agrupación de elementos que, en algunos casos, tienen una característica común. Los conjuntos se utilizan para definir los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad. Así, en un experimento aleatorio se define el **espacio muestral** como el conjunto de posibles resultados y se define **evento** como cualquier subconjunto del espacio muestral.

Por ejemplo, si el experimento aleatorio consiste en lanzar dos dados, se tendría que el espacio muestral S es:

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Este espacio muestral es equivalente al conjunto universal U. Es decir, cualquier situación o resultado de este experimento aleatorio estará dentro del conjunto universal.

En forma similar, cualquier subconjunto de ese conjunto universal, que para nuestro caso es el espacio muestral, recibe el nombre de **evento**.

Así, un evento E_1 podría estar formado por todos aquellos resultados en los cuales la suma de los dados es 6. Entonces E_1 sería:

$$E_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

En forma similar se puede definir un evento E_2 tal que el resultado del dado uno sea mayor que el resultado del dado dos. De esta manera tendríamos que E_2 sería:

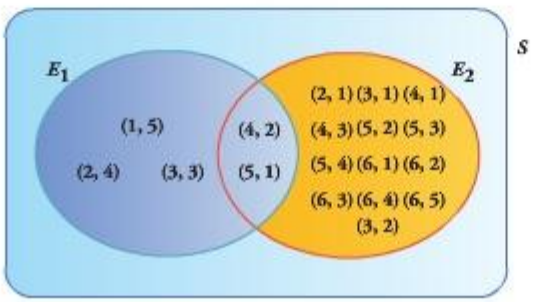
$$E_2 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3),$$
$$(5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

Ya que los eventos de un espacio muestral pueden ser considerados como conjuntos, es posible aplicar a un grupo de eventos todas las operaciones y propiedades que cumplen los conjuntos. Además, todos los eventos de un espacio muestral pueden ser representados como conjuntos en un diagrama de Venn.

Para el caso de los dados se puede observar en el diagrama que los eventos son intersecantes, pues hay dos opciones en las cuales, además de que la suma de los dados es seis, el valor del primer dado es mayor que el valor del segundo dado.

Así que:

$E_1 \cap E_2 = \{(4, 2), (5, 1)\}$



Historia de las matemáticas

Probabilidad y teoría de conjuntos



El matemático ruso Andréi Kolmogórov (1903-1987) estableció las bases modernas de la teoría axiomática de la probabilidad a partir de la teoría de conjuntos, en su libro *Los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad*, publicado en 1933.

EJEMPLO



El departamento de salud de una institución educativa está interesado en conocer cuántos de sus estudiantes adquirieron el seguro contra accidentes y cuántos tienen, además de una EPS, un servicio de medicina prepagada. En total 650 estudiantes tienen servicio de EPS, de los cuales:

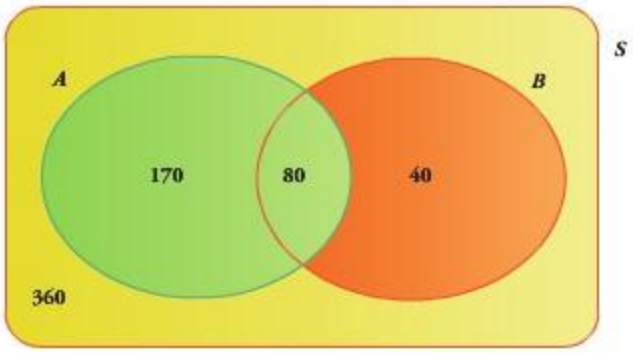
- **250 tomaron el seguro contra accidentes.**
- **120 tiene servicio de medicina prepagada.**
- **80 tiene seguro contra accidentes y medicina prepagada.**

Determinar cuántos de los estudiantes que tienen EPS tienen únicamente medicina prepagada.

Para determinar la cantidad solicitada es muy útil representar la información en un diagrama de Venn.

En este caso, el conjunto universal, es decir, el espacio muestral está formado por los 650 estudiantes que tienen servicio de EPS.

Sea A el conjunto que agrupa a los estudiantes que tomaron el seguro contra accidentes y B el conjunto de los estudiantes que tienen el servicio de medicina prepagada, entonces se tiene que:



En el diagrama se pueden identificar diferentes eventos:

- $A \cup B$ será el evento que consiste en que los estudiantes tienen seguro contra accidentes, medicina prepagada o ambas.
- $A \cap B$ será el evento que consiste en que los estudiantes tienen seguro contra accidentes y medicina prepagada.
- $A - B$ será el evento que consiste en que los estudiantes tienen únicamente seguro contra accidentes.
- $B - A$ será el evento que consiste en que los estudiantes tienen únicamente medicina prepagada.
- $(A \cup B)^C$ será el evento que consiste en que los estudiantes tienen únicamente EPS pues no tomaron el seguro contra accidentes ni tienen ningún plan de medicina prepagada.

Por tanto, se puede determinar que los estudiantes que tienen únicamente medicina prepagada corresponden al conjunto $B - A$, es decir, 40 estudiantes.

Matemáticamente

Define por comprensión las siguientes operaciones entre conjuntos:
$A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A^C.

5.1 Probabilidad y conjuntos

Actividad Recurso imprimible

Los conjuntos y los eventos de un espacio muestral verifican operaciones y propiedades similares. Así, partiendo de esta relación es posible hallar la probabilidad de ocurrencia de un evento dentro de un espacio muestral.

La **probabilidad** de ocurrencia de un evento dentro de un espacio muestral está dada por la expresión:

$$P = \frac{\#(E)}{\#(S)}$$

Donde $\#(E)$ es el número de elementos del evento y $\#(S)$ es el número de elementos del espacio muestral.

Recuerda que...

La probabilidad de un evento seguro es 1.

La probabilidad de un evento imposible es 0.

La probabilidad nunca es un número negativo.

Algunas propiedades de la probabilidad son:

- Como $\#(E) \leq \#(S)$ se puede afirmar que la probabilidad de ocurrencia de un evento siempre será un número entre 0 y 1.
- Si E es un evento del espacio muestral, entonces $P(E^C) = 1 - P(E)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Con respecto al ejemplo de la página anterior, se puede aplicar la probabilidad para responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar este haya tomado el seguro contra accidentes?

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{250}{650} = 0{,}38$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar este tenga únicamente medicina prepagada?

$$P(B - A) = \frac{\#(B - A)}{\#(S)} = \frac{40}{650} = 0{,}06$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar este tenga seguro contra accidentes y medicina prepagada?

$$P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(S)} = \frac{80}{650} = 0{,}12$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar este tenga medicina prepagada, seguro contra accidentes, pero no ambas?

$$P(A \Delta B) = \frac{\#(A \Delta B)}{\#(S)} = \frac{210}{650} = 0{,}32$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar este no tenga medicina prepagada ni haya tomado el seguro contra accidentes?

$$P(A \cup B)^C = \frac{\#(A \cup B)^c}{\#(S)} = \frac{360}{650} = 0{,}55$$

Recuerda que...

La operación entre conjuntos $A \Delta B$ se conoce como diferencia simétrica y se puede definir a partir de la unión y de la diferencia de conjuntos así:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Es posible escribir estas probabilidades como porcentajes, solamente hay que multiplicar por 100 los resultados obtenidos. Por ejemplo,

$$P(A) = 38\%$$

Es importante tener en cuenta que para resolver un problema de probabilidad en el que interviene varios eventos, resulta conveniente representar primero la situación en diagramas de Venn.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Soluciono problemas

Un experimento aleatorio consiste en lanzar dos dados y examinar los resultados de las caras superiores.

78. Determina el espacio muestral de dicho experimento aleatorio.

Escribe los elementos de los siguientes eventos.

79. *A*: Los números de las caras visibles sean iguales.

80. *B*: El número del primer dado es menor que el número del segundo dado.

81. *C*: Los números de las caras visibles son pares.

82. *D*: Los números de las caras visibles son impares.

Representa en un diagrama de Venn los conjuntos dados.

83. A y B **85.** A, B y C **87.** $A - C$

84. $C \cup D$ **86.** $B \cap C$ **88.** $D - B$

Sea *M* el evento que consiste en que la suma de los puntos de las caras visibles de los dados es 8 y *N* el evento que consiste en que el número del primer dado es mayor que el número del segundo dado.

89. Halla la probabilidad de que al seleccionar un resultado al azar, la suma de los números sea 8 y el número del primer dado sea mayor que el número del segundo dado. Justifica tu respuesta.

En una encuesta aplicada a 30 empresarios que asistieron a un foro internacional sobre nuevas tecnologías, se encontró que 15 de ellos hablaban español; 18, inglés; 8, español e inglés, y el resto no hablaba ninguno de los dos idiomas. Todas las encuestas fueron puestas en una bolsa para elegir una de ellas al azar, de tal forma que la persona que haya diligenciado la encuesta elegida reciba una beca para un curso de actualización en tecnología.

90. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona becada hable español?

91. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada hable solo inglés?

92. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada hable español o inglés?

93. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada no hable inglés?

Un maestro de economía acostumbra a iniciar la clase preguntándole a uno de sus estudiantes sobre el cambio de los valores económicos representativos del mercado (dólar, petróleo, café). Cada estudiante debe observar el noticiero, leer los periódicos o consultar en Internet y deducir qué sectores de la economía se están beneficiando con estos cambios y cuáles no. Antes de iniciar la clase, se sabe que de los 34 estudiantes, 19 vieron noticieros, 16 consultaron los periódicos y 11 investigaron en Internet. Además 6 miraron el noticiero y consultaron en Internet; 7 vieron las noticias y consultaron los periódicos, 5 leyeron el periódico y consultaron en Internet, 2 investigaron en los tres medios y el resto no hizo nada. Sea:

***N* el conjunto formado por los estudiantes que vieron el noticiero.**

***P* el conjunto formado por los estudiantes que leyeron el periódico.**

***R* el conjunto formado por los estudiantes que consultaron en Internet.**



94. Elabora el diagrama de Venn que describa la situación.

Halla la probabilidad de que al seleccionar un estudiante, este haya:

95. Visto el noticiero.

96. Leído el periódico y consultado en Internet.

97. Visto el noticiero y no haya consultado en Internet.

98. Leído el periódico pero no haya visto el noticiero.

99. Escribe una situación de probabilidad con tres eventos. Luego, resuélvela.

S **En un club campestre hay 700 socios de los cuales 229 practican golf; 300, tenis y 218, equitación. Se sabe además que 92 juegan golf y tenis; 69, golf y equitación, y 106, tenis y equitación.**



Por último, hay 42 socios que ejercitan los tres deportes y 178 que practican solo deportes diferentes a los mencionados.

100. Define los conjuntos determinados en la situación y elabora un diagrama de Venn que muestre la cantidad de socios por deporte.

El club está rifando un premio entre todos los socios por su fidelidad. Halla la probabilidad de que el premio lo gane un socio que:

101. Juegue tenis.

102. Juegue golf.

103. Practique equitación.

104. Juegue tenis o golf.

105. Juegue tenis o equitación pero no golf.

106. Practique un deporte diferente a la equitación.

107. Juegue golf, practique equitación pero no juegue tenis.

108. Juegue exclusivamente tenis.

109. Practique algo diferente a golf o equitación.

110. Practique algo diferente a tenis o equitación.

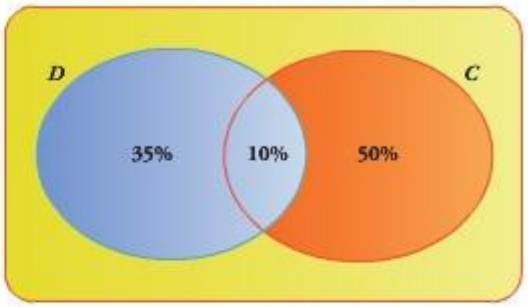
S **En una encuesta aplicada a las familias que viven en un conjunto residencial se encontró que el 40% de ellas recicla vidrio, el 55%, papel y el 15%, los dos materiales.**



111. Dibuja un diagrama de Venn que describa la situación.

112. Si en el conjunto residencial viven 380 familias, ¿qué cantidad de familias reciclan papel?

S **El diagrama de Venn que se muestra a continuación, presenta la información que registró un almacén de calzado femenino. Dicha información está relacionada con los diferentes medios de pago que utilizan sus clientes al adquirir alguno de sus zapatos.**



Los pagos que se registraron fueron hechos con tarjeta de crédito o con tarjeta débito, de tal forma que:

C es el evento que consiste en que la persona paga con tarjeta de crédito, D es el evento que consiste en que la persona paga con tarjeta débito.

Halla la probabilidad de que al seleccionar uno de los clientes este haya pagado con:

113. Tarjeta de crédito.

114. Tarjeta débito.

115. Tarjeta débito una parte, y otra parte con tarjeta de crédito.

116. Cualquier otra forma de pago diferente a tarjeta de crédito o tarjeta débito.

117. Con tarjeta de crédito o con tarjeta débito.

Se sabe que quienes hicieron un pago diferente a tarjeta débito o crédito lo hicieron en efectivo. Teniendo en cuenta esta nueva condición halla la probabilidad de que:

118. El pago fuese en efectivo.

119. El pago fuese con tarjeta de crédito o en efectivo.

120. El pago fuese con tarjeta débito o en efectivo.

121. **Escribe una situación con dos eventos E_1 y E_2 en la que se cumplan las siguientes condiciones.**

$P(E_1) = 0{,}5$

$P(E_2) = 0{,}3$

$P(E_1 \cup E_2) = 0{,}7$

6. Principio de multiplicación

Actividad Ampliación multimedia

En algunos experimentos aleatorios no es fácil determinar la cantidad de elementos del espacio muestral.

Por esta razón, es necesario aplicar algunas técnicas de conteo, entre las que se encuentra el **principio de multiplicación**.

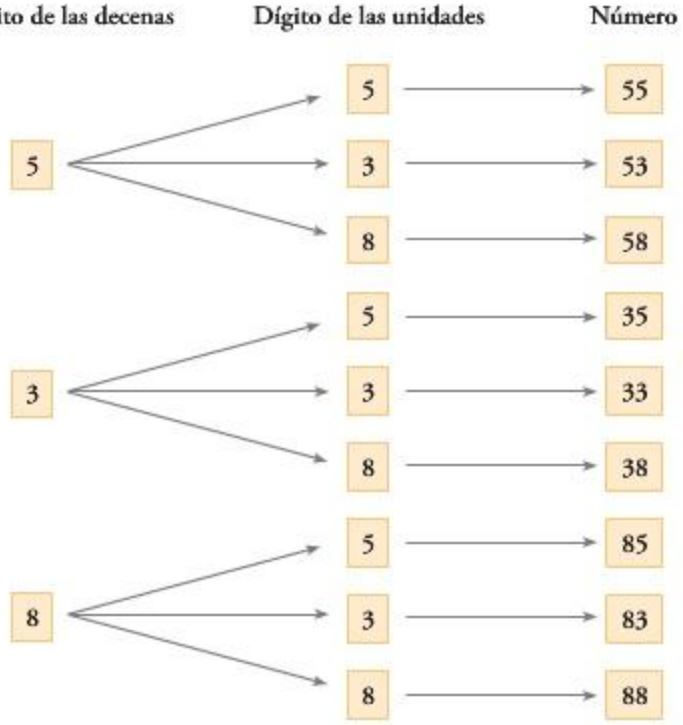
> Si en un experimento aleatorio se toma una muestra n, en la que hay orden y repetición, y el tamaño de la población es N, entonces se tiene que:
>
> $$N(S) = N^n$$
>
> Donde $N(S)$ es la cantidad de elementos del espacio muestral S.

Por ejemplo, si se quiere hallar cuántos números de dos cifras se pueden formar con tres dígitos diferentes, se tiene que $N = 3$ y $n = 2$.

Así, la cantidad de elementos del espacio muestral en este caso es:

$$N^n = 3^2 = 9.$$

Suponiendo que los tres dígitos son 5, 3 y 8, entonces se puede representar los elementos del espacio muestral en un diagrama de árbol como se muestra a continuación.



En este caso es importante tener cuenta el orden y la repetición para obtener los 9 números que conforman el espacio muestral.

Por tanto, se tiene que un dígito se puede repetir tanto en las unidades como en las decenas, y además cada número depende del orden de los dígitos, ya que es diferente tener 5 en las unidades y 3 en las decenas, que 3 en las unidades y 5 en las decenas.

6.1 Principio de multiplicación con varios eventos

Si un experimento aleatorio consta de varios eventos, de tal forma que el primer evento se puede realizar de N_1 formas, el segundo evento de N_2 formas y el i-ésimo evento de N_i formas diferentes, entonces **la cantidad de elementos del espacio muestral** $N(S)$ está dada por la expresión:

$$N(S) = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_i$$

El principio de multiplicación, en este caso, implica que los eventos ocurran uno tras otro.

EJEMPLO

El festival de la canción infantil otorga premios a los niños que clasifiquen en los tres primeros puestos. Si en el festival participan los siguientes niños: Camila (C), Laura (L), David (D), Pablo (P) y Federico (F), hallar las posibles formas en que los competidores podrían ganar los premios.

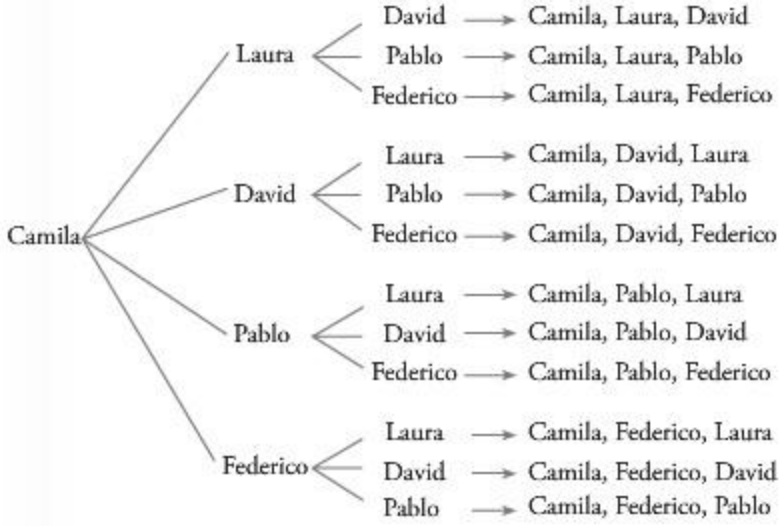


Primero, se determina la cantidad de formas en las que puede ocurrir cada evento. El primer evento consiste en otorgar el primer premio, para lo cual hay $N_1 = 5$ posibilidades. Una vez se otorgue el primer premio existen $N_2 = 4$ posibilidades para repartir el segundo premio. De la misma forma, una vez se entregue el segundo premio hay $N_3 = 3$ posibilidades de otorgar el último premio.

Luego, se tiene que el número de elementos del espacio muestral $N(S)$ es:

$$N(S) = N_1 \times N_2 \times N_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Finalmente, se tiene que hay 60 posibles formas de otorgar los tres premios. En el siguiente diagrama de árbol se muestra el caso en el que Camila queda en el primer puesto. En este caso hay 12 posibilidades y como son 5 niños, se deduce que el número total de posibilidades es $12 \times 5 = 60$.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Ejercito · Propongo · Razono · Soluciono problemas

Sebastián apuesta en un sistema de juego con números de tres cifras y siempre juega con números cuyas cifras son 2, 4 o 6.

122. Elabora el diagrama de árbol que representa el espacio muestral del experimento que consiste en que Sebastián forme números de tres dígitos diferentes.

123. ¿Cuántos números que reúnan las condiciones del problema se pueden formar?

124. De esos números, ¿cuántos son pares y cuántos, impares?

En una heladería se ofrecen los siguientes sabores para los helados en barquillo:

Fresa
Mandarina
Chocolate
Almendra
Chicle
Brownie



Elabora un diagrama para encontrar la respuesta a cada pregunta.

125. ¿Cuántas posibilidades hay de armar un barquillo con dos bolas de helado de diferentes sabores?

126. ¿Cuántas posibilidades hay de armar un barquillo con tres bolas de helado de diferentes sabores?

127. ¿Cuántas posibilidades hay de armar un barquillo con cuatro bolas de helado de diferentes sabores?

Lina tiene cuatro fichas, cada una con una letra de la palabra ROMA. Responde:

128. ¿Cuántas palabras diferentes, sin importar su significado, puede formar con dichas letras?

129. ¿Cuáles de esas palabras tienen algún significado en el idioma español?

130. Si fuera posible repetir la vocal *O* dentro de la palabra, ¿cuántas palabras se podrían formar?

131. Si las palabras solo pueden empezar con una vocal, ¿cuántas palabras se podrían formar?

132. Si las palabras solo pueden empezar con una consonante, ¿cuántas palabras se podrían formar?

133. Si la condición para las palabras es que no puede haber ni dos vocales seguidas ni dos consonantes seguidas, ¿cuántas palabras se podrían formar?

Una empresa de telefonía celular ofrece a sus clientes tres marcas de equipos diferentes: *A*, *B* y *C*. Además, cada equipo puede ser adquirido en las modalidades de prepago y pospago y también puede o no tener plan de datos.

134. Determina la cantidad de posibilidades que tiene un cliente para adquirir uno de los equipos en cualquiera de las modalidades.

135. Elabora un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades que tiene un cliente para adquirir alguno de los tres equipos.

Lee el enunciado y responde la pregunta. Luego, justifica tu respuesta a partir de un diagrama de árbol.

136. Una encuesta está dividida en tres partes. Cada parte, consta de cinco preguntas y cada una de ellas tiene tres opciones de respuesta. Si se quiere elegir al azar tres preguntas de la encuesta, una por cada parte, ¿cuántas posibilidades hay para escoger las preguntas?

Las placas para identificar los automóviles se crean de manera distinta según el país. Por ejemplo, en Italia, las matrículas están formadas por dos letras iniciales, tres números centrales y dos letras finales.



137. ¿Cuántas placas diferentes se pueden formar con estas especificaciones?

Se lanza un dado al aire, si el resultado es par se lanza una moneda; si el resultado es impar se vuelve a lanzar el dado.

138. ¿En este experimento aleatorio existe el orden?

139. ¿Existe repetición?

140. ¿De cuántas formas puede resultar este experimento?

S **Para la elección de los cargos de administrador y secretario de un conjunto residencial se postularon los siguientes propietarios:**

Pedro, María, Luisa, Ángela, Gonzalo y Rosa.

141. Si se define que el administrador debe ser hombre y la secretaria mujer, ¿de cuántas formas diferentes se puede hacer la elección?

142. ¿Cuáles serían estas formas?

143. Si se define que el administrador debe ser mujer y el secretario hombre, ¿de cuántas maneras se puede hacer la elección?

S **Un restaurante de comidas rápidas ofrece un menú especial para niños. Este menú tiene cuatro grupos de comidas y de cada uno se debe escoger un alimento. Los grupos se muestran a continuación:**



144. Elabora el diagrama de árbol correspondiente.

145. ¿Cuántas formas diferentes de menú infantil se pueden armar si se elige un alimento de cada grupo?

146. ¿Cuántas formas de menú se pueden formar si solo se escoge *nuggets* en el primer grupo?

147. ¿Cuántas formas de menú se pueden formar si no se elige ninguna fruta?

Escribe un experimento aleatorio teniendo en cuenta que N_1 es la cantidad de posibilidades de que ocurra el primer evento y N_2 es la cantidad de posibilidades de que ocurra el segundo evento.

148. $N_1 = 8$ y $N_2 = 3$

149. $N_1 = 16$ y $N_2 = 7$

S **Cuatro amigos, Camilo, Miguel, Andrés y Santiago, compraron boletas para asistir a una película. Las sillas están marcadas como M4, M5, M6 y M7.**



150. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar los cuatro amigos en las sillas?

151. Si Camilo y Santiago se sientan en las sillas M4 y M5, ¿de cuántas formas se pueden sentar todos?

152. Si Andrés y Miguel no se sientan en sillas contiguas y Miguel se sienta en la silla M4, ¿de cuántas maneras se pueden sentar?

153. Si otro amigo comprara la boleta correspondiente a la silla M3, ¿de cuántas maneras se pueden sentar los cinco amigos?

R **En una caja hay 9 balotas numeradas del 1 al 9. Para formar un número de dos dígitos se selecciona una balota al azar, se registra el número que salió y se devuelve la balota a la caja para la siguiente selección.**

154. ¿Cuántos números diferentes se pueden formar?

155. Si la primera balota no se devuelve a la caja, ¿cuántos números se pueden formar?

S **Sofía, Juliana, Luisa, Miguel, Andrés y Felipe se han postulado para los dos cargos de representantes estudiantiles.**

156. ¿Cuántas posibilidades hay de hacer la elección.

157. ¿Cuántas posibilidades hay de hacer la elección si obligatoriamente debe haber una mujer?

158. ¿Cuántas posibilidades hay de hacer la elección si obligatoriamente debe haber un hombre?

159. ¿Cuántas posibilidades hay de hacer la elección si obligatoriamente Sofía debe ser elegida?

160. Si se sabe que Andrés no resultará elegido, ¿cuántas posibilidades hay de escoger los dos ganadores?

EJERCICIOS PARA REPASAR

Caracterización de variables cuantitativas para datos no agrupados

La instructora de matrogimnasia de un grupo de 35 bebés registró la edad de estos en meses.

18	19	16	15	15	17	19
20	17	16	16	17	15	20
17	17	19	18	15	17	16
16	17	24	11	17	16	15
17	16	19	16	16	19	17

161. La media de las edades del grupo de bebés es:

_____

162. Responde y justifica tu respuesta. ¿Existe una moda en dicho conjunto?

_____

Organiza los datos. Luego, determina los percentiles y cuartiles indicados.

163. p_{55} = _____ **166.** Q_1 = _____

164. p_{13} = _____ **167.** Q_2 = _____

165. p_{23} = _____ **168.** Q_3 = _____

Construye en tu cuaderno el diagrama de cajas y bigotes. Luego, completa.

169. Extremo inferior: _____

170. Extremo superior: _____

Completa los siguientes datos.

171. Dato menor = _____

172. Dato mayor = _____

173. Mediana = _____

174. Rango intercuartílico = _____

175. Rango = _____

176. Varianza = _____

177. Desviación estándar = _____

178. Escribe una conclusión que determine si la media es o no un buen representante de la edad de los bebés. Justifica tu respuesta teniendo en cuenta las medidas halladas anteriormente.

_____

_____

_____

Medidas de dispersión

Escribe la varianza y la desviación estándar en cada una de las siguientes situaciones.

179. Las temperaturas en grados centígrados de una ciudad durante una semana al mediodía fueron:

5, 21, 27, 12, 9, 18, 13.

_____

180. Los pesos, en kilogramos, de los jugadores de un equipo de fútbol son:

52, 62, 60, 70, 58, 61, 67, 72, 69, 56, 59

_____

181. Durante 7 días asistieron las siguientes cantidades de personas a una obra de teatro:

52, 85, 96, 89, 120, 125, 140

_____

182. Las edades, en años, de 20 estudiantes son:

12	15	13	9	16
13	9	10	11	15
9	10	6	13	8
8	11	8	7	9

_____

Se seleccionaron 10 personas para participar en la última prueba de salto largo en las finales de los intercolegiados de atletismo. Se calculó el promedio y la desviación estándar y se encontró que

$$\bar{x} = 2{,}50 \text{ y } s = 0{,}46.$$

Los saltos de 8 de los 10 jugadores, en metros, fueron

2,00; 2,15; 3,00; 2,90; 2,50; 3,10; 2,90; 2,50.

183. Encuentra los datos que faltan sabiendo que su diferencia es 0,31 m.

Caracterización de variables continúas para datos agrupados

A continuación se presentan los datos obtenidos al preguntar por la edad de las personas que asistieron a un espectáculo de humor en un teatro de la ciudad.

Edad	f
[15, 19)	23
[19, 23)	35
[23, 27)	32
[27, 31)	46
[31, 35)	21
[35, 39)	43

184. Elabora el histograma correspondiente.



185. Completa la tabla con las frecuencias acumuladas, las marcas de clase y las frecuencias porcentuales.

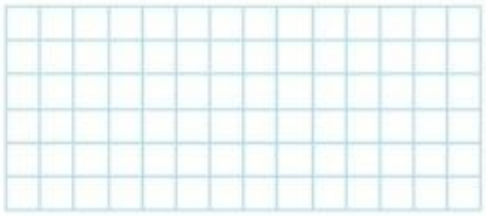
Edad	f	fr	F	%	X_i
[15, 19)	23				
[19, 23)	35				
[23, 27)	32				
[27, 31)	46				
[31, 35)	21				
[35, 39)	43				

186. Elabora en tu cuaderno el polígono de frecuencias y la ojiva correspondientes a los datos de la distribución.

La siguiente tabla muestra la cantidad de chocolates que consumen los clientes de una empresa en una semana.

Cantidad	[60, 63)	[63, 66)	[66, 69)
f	5	18	42

187. Calcula la desviación estándar de la muestra.

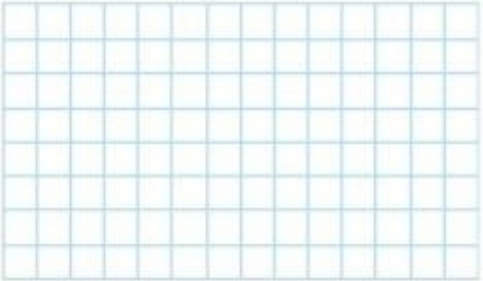


Conjuntos y eventos

En una encuesta sobre las actividades que los jóvenes realizan en su tiempo libre, se presentaron los siguientes resultados:

50 ven televisión, 42 escuchan música, 45 practican videojuegos, 25 ven televisión y escuchan música, 27 escuchan música y practican videojuegos, 23 ven televisión y practican video juegos, 15 hacen las tres actividades.

188. Representa la situación en un diagrama de Venn.



189. ¿Cuántos jóvenes ven únicamente televisión en su tiempo libre?

PROBLEMAS PARA REPASAR

La información que se presenta a continuación está relacionada con la edad, en meses, en la cual empieza caminar un grupo de bebés:

9	14	11	11	13	11	12	12
10	12	15	11	14	10	14	13
11	12	12	11	13	14	12	11
11	12	11	12	14	13	10	12
12	13	13	12	12	11	10	14
12	13	13	13	13	12	13	14
12	12	12	10	13	13	14	13



¿La media es un buen descriptor de la muestra utilizando las medidas de dispersión y posición?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿La media es un buen descriptor de la muestra utilizando las medidas de dispersión y posición?

¿Cuáles son los datos del problema?

Se presenta la edad, en meses, en la cual empieza a caminar un grupo de 56 bebés.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se calcula la media de la muestra: $\bar{x} = 12{,}18$

Este dato significa que, en promedio los bebés empiezan a caminar a los 12,18 meses. Para saber qué tan preciso es este dato se calcula la desviación estándar y se analiza en un diagrama de cajas y bigotes si existen o no datos atípicos.

Luego, la desviación estándar es: $s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{56 - 1}} = \sqrt{\frac{92{,}214}{55}} = 1{,}29$

La desviación estándar es pequeña. Luego, parece no haber valores atípicos en la muestra, de este modo la media resulta ser un buen descriptor de la muestra. Sin embargo, para verificar esta afirmación es necesario elaborar el diagrama de cajas y bigotes.

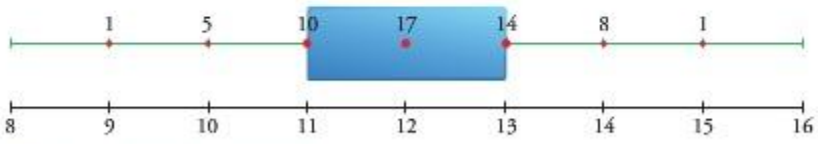
Ahora, se ordena el conjunto de datos y se hallan los cuartiles, así:

$Q_1 = \left(\frac{25}{100}\right)56 = 14$ Es decir, Q_1 es el promedio de los datos 14 y 15. Así $Q_1 = 11$

$Q_2 = \left(\frac{50}{100}\right)56 = 28$ Es decir, Q_2 es el promedio de los datos 28 y 29. Así $Q_2 = 12$

$Q_3 = \left(\frac{75}{100}\right)56 = 42$ Es decir, Q_3 es el promedio de los datos 42 y 43. Así $Q_3 = 13$

Finalmente, el diagrama de cajas y bigotes es:



Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifican las operaciones y se concluye que la media resulta ser un buen descriptor de la muestra.

Las alturas de los jugadores de un equipo de baloncesto vienen dadas por la siguiente distribución de frecuencias:

Altura	No. de jugadores
[1,70 - 1,75)	1
[1,75 - 1,80)	3
[1,80 - 1,85)	4
[1,85 - 1,90)	8
[1,90 - 1,95)	5
[1,95 - 2,0)	2

190. Calcula la media y los cuartiles de la distribución.

191. Determina el valor de la desviación estándar.

192. Escribe algunas conclusiones.

Pedro es propietario de una procesadora de pulpa de fruta para la fabricación de mermelada. En la última temporada invernal observó que el precio de la fruta varió mucho entre un pedido y otro. La siguiente tabla muestra los precios:

Kilos de fruta	Valor por kilo ($)
650	2.560
430	3.126
534	2.870
720	2.498
342	3.230

193. ¿Cuál es el valor promedio del kilo de fruta?

194. ¿Por qué no es posible calcular el promedio normal en esta situación?

Los siguientes datos muestran el tamaño de un grupo de plantas después de permanecer expuestas a diferentes grados de luz:

Crecimiento en centímetros

45	23	34	10	43	39	67
38	35	23	29	41	28	32
34	36	26	39	21	20	23

195. ¿Cuántos centímetros crecieron en promedio las plantas?

196. ¿Está medida es un buen descriptor de la muestra? Justifica tu respuesta.

197. ¿Se encuentra algún crecimiento atípico en la distribución? Justifica tu respuesta con un diagrama de cajas y bigotes.

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

...Para determinar si el crecimiento de un bebé es el adecuado según su edad.

Los conceptos estadísticos y en particular la caracterización de variables, se aplican en diversas ciencias, entre las que se encuentra la pediatría. Así, los pediatras llevan un control de ciertas medidas relacionadas con la condición física del bebé, principalmente de su talla, su peso y su perímetro craneal, las cuales se registran en unas tablas de crecimiento que reciben el nombre de percentiles.



El peso, la talla y el perímetro craneal son las medidas más simples para conocer si el crecimiento del niño es satisfactorio. Se trata de variables continuas cuyos valores normales se agrupan en torno a unas curvas.

Galería de imágenes



Los percentiles en pediatría no difieren de los percentiles planteados en estadística, pues continúan siendo 99 valores que representan 100 partes porcentualmente iguales de una distribución, que en este caso, la distribución es de los pesos y las tallas de los niños y niñas desde que nacen hasta los 18 meses.

El manejo de los percentiles de peso y talla es de uso muy común en los bebés, pues valores anormales en ellos pueden ser un primer indicador de enfermedades que van desde la malnutrición hasta síndromes extraños y que comprometen su vida. En cambio, en niños mayores no se utilizan mucho los percentiles, pues las visitas al pediatra no son tan frecuentes como en los bebés y los datos como el peso y la talla se ven influenciados por otros factores como la herencia, la alimentación, el ejercicio, entre otros.

Para los pediatras, en todo el mundo, los indicadores de un bebé normal se encuentran ubicados entre el percentil 3 (P3) y el percentil 97 (P97). Pesos y tallas ubicados fuera de este rango son un signo de alarma para los padres.

1. **A continuación se presenta una tabla en la que se registran los valores de los percentiles 3 y 97 de talla y peso, para bebés hasta de un año de edad.**
   Consulta el registro, mes a mes, del peso y la talla de algún bebé de un año de edad. Luego, completa la tabla.

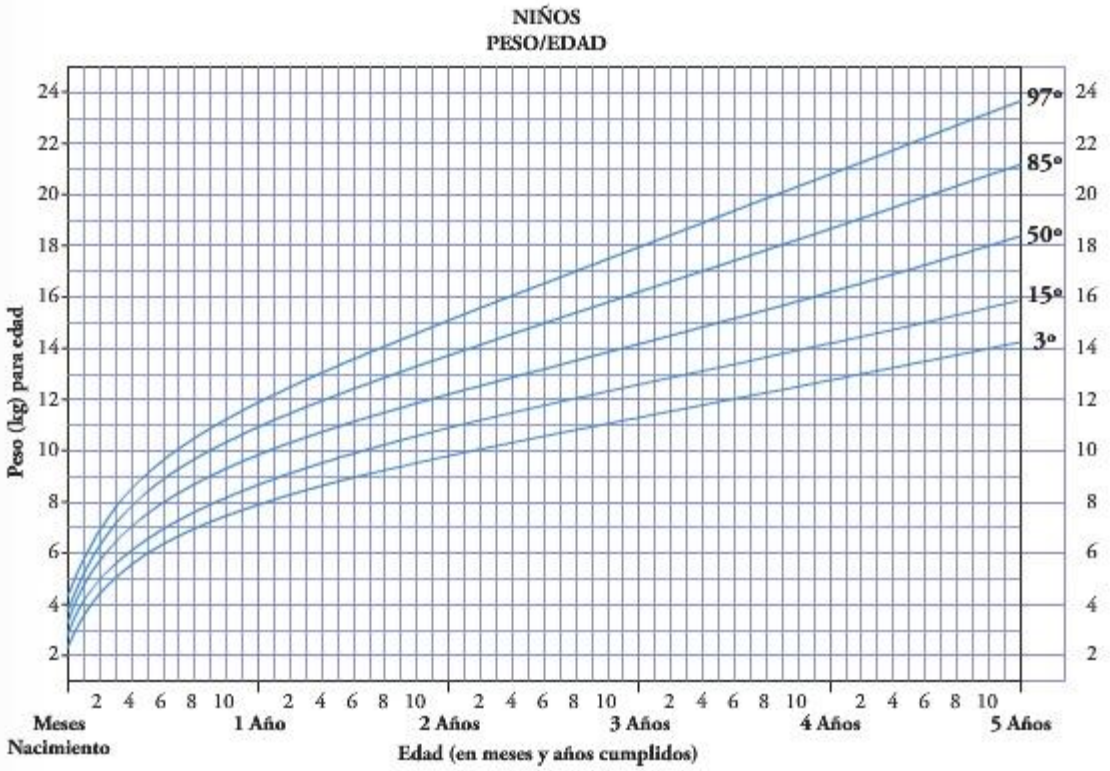
Meses	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P3	2,8	3,6	4,4	5	5,6	6,1	6,5	6,8	7,2	7,5	7,8	8	8,2
P97	4,4	5,6	6,6	7,6	8,4	9,2	9,8	10,4	10,9	11,4	11,8	12,1	12,4
Pesos													
P3	47	50,3	53,3	56,2	58,4	60,4	62,1	63,8	65,2	66,6	67,9	69	70,1
P97	53,3	57,4	61	64,2	67	68,9	70,5	72,3	74	75,5	77	78,5	79,7
Tallas													

2. A partir de la información registrada en la tabla, escribe una conclusión acerca del crecimiento del bebé hasta su primer año de edad.

3. Determina si hubo momentos en los cuales el bebé se encontraba por debajo o por encima de lo normal. Escribe los meses correspondientes y la diferencia (positiva si estuvo por encima de P_{97} y negativa si estuvo por debajo de P_3).

4. Los datos registrados en las tablas de percentiles se representan en gráficas llamadas curvas de crecimiento. La curva ideal es la que corresponde al percentil 50. Así, los percentiles 3 y 97, se ubican milimétricamente por debajo y por encima de esta curva, de tal forma que al ubicar en la gráfica mes a mes los datos de un bebé se puede determinar "qué tan normal" es su crecimiento.

   A continuación te presentamos un formato como el que completan los pediatras para analizar la curva de crecimiento de un bebé. Ubica sobre dicho formato los datos de los pesos de la tabla del punto 1. Luego, une los puntos para trazar la curva de crecimiento del bebé.



5. ¿Qué significa que el peso de un bebé de 5 meses esté en percentil 45?

6. Escribe el peso y la talla de un bebé de 7 meses. Luego, determina la diferencia de cada percentil con respecto al percentil ideal.

7. Consulta qué es el percentil del perímetro craneal. Luego, escribe un ejemplo en el que el peso y la talla de un bebé de 9 meses, estén en un percentil adecuado, pero el percentil de su perímetro craneal esté por debajo de P3.



Trabaja con StadiS 1.05

Objetivo: calcular algunas medidas de tendencia central y medidas de dispersión con datos sin agrupar.

Descripción: introducir datos correspondientes a una situación en la tabla de distribución de StadiS 1.05. Luego, hallar la frecuencia absoluta y calcular la moda, la media, la varianza y la desviación típica.

Para acceder a StadiS 1.05, ingresa y descarga el programa en: descargar.portalprogramas.com/StadiS.html

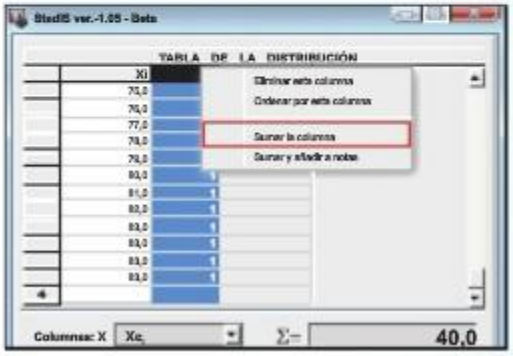
1. Haz clic en el ícono *Nueva*. Aparecerá una ventana llamada **NUEVA DISTRIBUCIÓN**. Despliega las opciones **UNIDIMENSIONAL:** *X* y selecciona *Discreta* y luego en *Aceptar*.



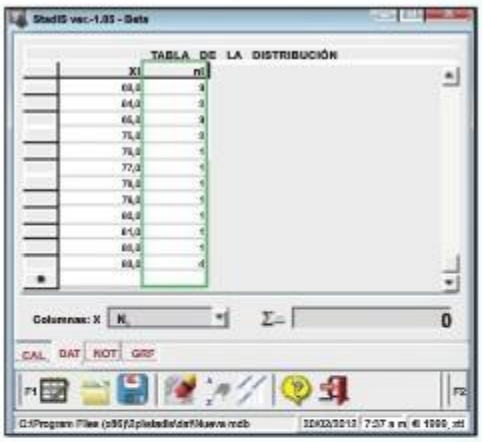
2. En la ventana de **TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN** puedes comenzar a escribir, debajo de la columna x_i, cada uno de los valores numéricos correspondientes a una población o muestra. Por ejemplo, ubica en la tabla los siguientes valores de datos que corresponden al tiempo, en segundos que permanecen 40 ciclistas en un puesto de bebidas refrescantes.

30	32	32	34	44
50	52	52	55	57
62	62	62	63	63
65	65	65	75	75
79	80	81	82	83
45	57	63	76	83
47	60	64	77	83
47	60	64	78	83

3. Selecciona la columna n_i. Luego, elige la opción **Sumar la columna**, para verificar la cantidad total de elementos de la muestra.



4. Haz clic en el botón **Recuento** y aparecerá la frecuencia absoluta de cada valor en la columna n_i.



5. Oprime la pestaña **CAL** y aparecerá la ventana cuyos botones sirven para calcular la media, la moda, la mediana y otras medidas correspondientes a los valores digitados.



6. Oprime el botón **Mo** para calcular la moda del conjunto de valores digitados. Es importante tener en cuenta que el programa calcula la moda según los valores de la columna n_i.



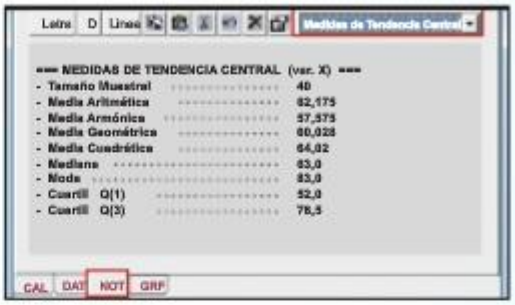
7. Selecciona el botón **Me** para calcular la mediana.



8. Activa el botón $\bar{x}$ para calcular la media aritmética o promedio del conjunto de datos. Observa la fórmula que se aplica para calcularla.



9. Haz clic en la pestaña **NOT** y aparecerán todas las **Medidas de Tendencia Central**.



10. Elige la opción **Medidas de Dispersión** y aparecerán la varianza y la desviación típica entre otras.



11. Ingresa a StadiS 1.05 los siguientes valores correspondientes a las edades de 40 estudiantes.

13	9	8	13	11
7	6	11	14	7
16	14	10	15	6
15	13	7	6	15
8	9	12	10	14
6	12	10	8	14
9	13	14	9	15
8	7	7	7	16

12. Utiliza StadiS 1.05 para calcular las siguientes medidas correspondientes al anterior conjunto de valores.

a. Media **c.** Mediana

b. Moda **d.** Varianza

GLOSARIO

A

Ángulos alternos externos: ángulos que se forman en distinto lado respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.
Ángulos alternos internos: ángulos que se forman, internamente, en distinto lado respecto de una transversal que corta dos rectas no adyacentes.
Ángulos opuestos por el vértice: ángulos que tienen un vértice común donde los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.
Ángulos suplementarios: ángulos cuyas medidas suman 180°.

B

Baricentro: punto en que concurren las medianas de un triángulo.
Binomio: expresión algebraica que tiene dos términos.
Bisectriz: recta que divide un ángulo en dos congruentes.

C

Círculo: región delimitada por una circunferencia.
Circunferencia: curva cerrada cuyos puntos están a igual distancia del centro.
Coeficiente: constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.
Cuadrado perfecto: número que se obtiene al elevar otro al cuadrado.

D

Decimal exacto: expresión decimal cuyas cifras decimales son finitas.
Decimal periódico: expresión decimal cuya parte decimal tiene una cifra o un grupo de cifras que se repite indefinidamente.
Desigualdad: expresión que simboliza una relación matemática de orden entre dos cantidades.
División sintética: método abreviado para hallar el cociente y el residuo, cuando el divisor es un binomio de la forma $x - a$.

E

Ecuación: igualdad entre expresiones algebraicas que solo es cierta para algunos valores de la variable.
Ecuaciones equivalentes: ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.
Espacio muestral: conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.
Experimento aleatorio: experimento del cual no se puede prever el resultado.
Expresión algebraica: toda expresión compuesta por números y por letras separadas por los signos de las operaciones fundamentales. Por ejemplo, $3ax, 5 + a = 3b$.
Expresión algebraica irracional: expresión algebraica en la que aparece alguna variable bajo un signo radical.
Expresión algebraica racional: expresión algebraica en la que aparece alguna variable en el denominador.

F

Factorización: descomposición de un polinomio como producto de factores primos.
Fracción algebraica: cociente de dos polinomios.
Función: en general, una función de una variable x es una regla de correspondencia o fórmula que asigna a cada valor x del dominio un único número en el rango.
Función afín: función de la forma $y = mx + b$ donde m y b son constantes.
Función lineal: función de la forma $y = mx$ donde m es constante.

G

Grado absoluto de un monomio: corresponde a la suma de los exponentes de los factores de la parte literal del monomio.
Grado relativo de un monomio: corresponde al exponente de uno de los factores de la parte literal del monomio.

I

Identidad: igualdad entre expresiones algebraicas que es verdadera para cualquier valor de las variables.
Incógnita: cada una de las letras distintas que aparecen en una ecuación.
Inecuación: relación de desigualdad entre expresiones algebraicas.
Intervalo: subconjunto numérico infinito de los números reales. Puede ser abierto, cerrado o semiabierto.

M

Media aritmética: promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.
Mediana: valor que ocupa el lugar central entre todos los valores ordenados de una tabla de frecuencias.
Mediatriz: recta que divide un segmento en dos congruentes.

Medidas de tendencia central: valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.
Moda: valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.
Monomios semejantes: monomios que tienen la misma parte literal y el mismo grado en cada variable.

N

Números irracionales: conjunto formado por todas aquellas expresiones cuyas cifras decimales son infinitas y no periódicas y que, por tanto, no es posible escribirlas de la forma $\frac{a}{b}$. Se simbolizan por medio de la letra I.
Números racionales: conjunto formado por los números de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

Números reales: conjunto formado por la unión entre el conjunto de los números racionales y los irracionales. Se simboliza por medio de la letra R.

P

Parte literal de un término: parte conformada por las variables con sus respectivos exponentes en un término.
Polinomio: expresión algebraica que consta de uno o más términos.
Polinomio irreductible: polinomio que no se puede expresar como el producto de polinomios de menor grado.

Potenciación: operación que simplifica la multiplicación de factores iguales.
Producto notable: multiplicación entre polinomios cuyo resultado se puede generalizar para hallar la respuesta sin efectuar todas las operaciones.

R

Radicación: operación inversa a la potenciación. Permite hallar la base de una potencia.
Radio: segmento que une el centro de un círculo con un punto cualquiera de la circunferencia.
Rectas paralelas: líneas rectas que tienen la misma pendiente y no se cortan en ningún punto.

Rectas perpendiculares: líneas rectas en las que el producto de sus pendientes es igual a -1. Forman cuatro ángulos rectos en el punto que se cortan.
Rectas secantes: líneas rectas que se cortan en un punto único.
Recorrido: en estadística, diferencia entre el dato mayor y el dato menor de una colección de datos.

S

Sistemas de ecuaciones lineales: conjunto de dos ecuaciones lineales con dos variables o incógnitas. El conjunto de parejas ordenadas que satisfacen a ambas ecuaciones se denomina solución del sistema.

T

Teorema: proposición que puede ser demostrada.
Término: cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

V

Valor absoluto: el valor absoluto de un número a, se expresa $|a|$, y se define como la distancia que hay desde el 0 hasta dicho número.
Valor numérico de un monomio: cantidad que se obtiene al sustituir las letras por números.
Variable algebraica: cada una de las letras distintas que aparecen en una expresión.

Variable dependiente: variable cuyo valor depende de los valores que se asignen a la variable independiente.
Variable independiente: variable a la cual se le asignan valores arbitrarios en una función.

BIBLIOGRAFÍA

- Ministerio de Educación Nacional. *Decreto 1860 de agosto 3 de 1994.*
- Ministerio de Educación Nacional. *Estándares básicos de competencias matemáticas*, Bogotá, D. C., 2006.
- Ministerio de Educación Nacional. *Serie lineamientos curriculares. Indicadores de logros curriculares. Hacia una fundamentación*, Bogotá, D. C., 2006.
- Ministerio de Educación Nacional. *Orientaciones generales para la educación en tecnología*, Bogotá, D. C., 2006.
- AA.VV. *Currículo y aprendizaje*, Bogotá, Santillana, 1996.
- AA.VV. *Trabajemos solución de problemas con Santillana*, Bogotá, Santillana, 1997.
- AA.VV. *Matemáticas 3 ESO*. España, Editorial Santillana, 2007, pp. 37, 57, 153, 229, 263.
- AA.VV. *Matemáticas 4 ESO*. España, Editorial Santillana, 2008, pp. 143, 169, 399.
- AA.VV. *Matemáticas 1 Bachillerato aplicadas a las Ciencias Sociales I, Solucionario*. España, Editorial Santillana, 2008, p. 82.
- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*, Bogotá, Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- Alvarenga, B. y Máximo, A. *Física general con experimentos sencillos*, México, Harla, S. A., 1983.
- Álvarez, Fernando. *Fractal 3*, Matemáticas.
- Bagni, Giorgio T. D´Amore, Bruno. *Leonardo y la matemática*. Bogotá, Editorial Magisterio, 2007.
- Baldor. *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. México, Publicaciones cultural, 1998.
- Barnett, Rich. *Serie de comprendidos Schaum. Teoría y problemas de geometría plana con coordenadas*, México, McGraw Hill, 1970.
- Bol, Brian. *Matemáquinas, la matemática que hay en la tecnología*, Barcelona, Labor, 1992.
- Bueche, F. *Fundamentos de física I*, México, McGraw Hill Latinoamérica S. A., 1988.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis; Castro, Enrique. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 2*, España, Editorial Síntesis, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*, España, Editorial Síntesis, 1997.
- Clements, et al. *Serie awli. Geometría*, México, Addison Wesley, Pearson educación, 1998.
- Del Olmo Romero, María Ángeles; Moreno Carretero, María Francisca; Gik Cuadra, Francisco. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 19*, España, Editorial Síntesis, 1993.
- Díaz Rodino, Juan; Batanero Bernabéu, María Del Carmen; Cañizares Castellanos, María Jesús. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 27*, España, Editorial Síntesis, 1996.
- Fiol Mora, María Luisa; Fortuna Aymemi, Joseph María. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 20*, España, Editorial Síntesis, 1990.
- González, José Luis; Iriarte, María; Jimeno, Manuela; Ortiz, Alfonso; Sanz, Esteban; Vargas Machuca, Inmaculada. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 6*, España, Editorial Síntesis, 1990.
- Guillén Soler, Gregoria. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 15*, España, Editorial Síntesis, 1997.
- Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. *Pensar matemáticamente*, Madrid, MEC/Labor, 1992.
- Microsoft Corporation. Biblioteca de consulta Microsoft Encarta 2005, 1993-2004.
- Moise, E. y Downs, F. *Geometría moderna*, Estados Unidos, Addison Wesley publishing company, 1966.
- Paul, G. Hewitt. *Física conceptual*, México, Pearson Educación, 1999.
- Pappas, Theoni. *El encanto de las matemáticas. Los secretos ocultos del arte*, España, 1996.
- Pappas, Theoni. *El encanto de las matemáticas. El orden oculto tras la naturaleza y su arte*, España, 1999.
- Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas, 1989.
- Sestier, Andrés. *Historia de las matemáticas*, México, Limusa, 1983.
- Stephen, F. M. *Historia de la ciencia*, Madrid, Alianza Editorial, 2001.
- Vásquez, C. *Geometría plana y del espacio*, Madrid, Biblioteca Santillana de consulta, 1984.